ریاضی عمومی ۱

برای دوره درس ریاضی عمومی در تابستان ۹۱ (در دوره ویژه ۸۵ ساعتی در آموزشگاههای تصبر و پژوهش که شامل ۲ جلسه در هر هفته است) برای کنکور کارشناسی ارشد و دکتری به مراجع زیر نیاز دارید:

۱) ریاضی عمومی ۱ (جلد اول و جلد دوم) – ویرایش سوم (انتشارات : نگاه دانش ، مؤلف : مسعود آقاسی)

۲) ریاضی عمومی ۲ (جلد اول و جلد دوم) – ویرایش سوم (انتشارات : نگاه دانش ، مؤلف : مسعود آقاسی)

جلد اول کتابها شامل درس و تست و جلد دوم فقط شامل تست با پاسخ تشریحی (تستهای سال ۸۳ تا ۹۱ رشته‌های مختلف در دانشگاه سراسری و آزاد) است و بنابراین جلد دوم باید در پایان دوره کلاسی تابستان و برای مرور و یادآوری مطالب درسی مورد استفاده قرار گیرد. در این کلاس مطالب از روی جلد اول مراجع بالا تدریس می‌شوند.

آنچه برای استفاده مفید از کلاس باید انجام دهید

برای استفاده مفید از کلاسی که در آن شرکت می‌کنید، ابتدا لازم است که اطلاعاتی در مورد ساختار کتاب داشته باشید. هر فصل از جلد اول ریاضی ۱ و ۲ از پنج قسمت تشکیل شده است. [1]

- قسمت اول که فصل با آن شروع شده و به خلاصه نکات مهم ختم می‌شود و شامل درس و مثال و تست است.(مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۶۱ تا ۹۴)
- قسمت دوم که تستهای تکمیلی سطح ۱ (تستهای ساده و متوسط) است.(مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۹۵ تا ۱۰۸)
- قسمت سوم که تستهای تکمیلی سطح ۲ (تستهای سخت) است.(مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۱۰۹ تا ۱۱۸)
- قسمت چهارم که خودآزمایی سطح ۱ (تستهای ساده و متوسط) است.(مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۱۱۹ تا ۱۲۲)
- قسمت پنجم که خودآزمایی سطح ۲ (تستهای سخت) است.(مثلاً در فصل ۲ از صفحه ۱۲۳ تا ۱۲۴)

پس از پایان هر جلسه از کلاس برای جلسه بعدی کلاس موارد زیر را انجام دهید:

۱) مطالب درسی تدریس شده در کلاس را از روی جزوه خود به دقت مطالعه نمایید.

۲) همه مثال و تستهای مربوط به هر مبحث را از قسمت اول کتاب حل کنید. مثال و تستها را ابتدا خودتان حل کنید (بدون آنکه خود را ملزم به در نظر گرفتن زمان برای حل آنها نمایید [2]) سپس به پاسخ کتاب مراجعه نمایید. توجه کنید که سؤالات مطرح شده در قسمت اول، سؤالات آموزشی هستند و برخی از آنها(خصوصاً سؤالاتی که دارای «کادر سایه دار» هستند) دارای ایده یا نکات خاصی برای حل هستند و لذا ممکن است قادر به پاسخگویی به آنها نباشید و بنابراین مرور پاسخ آنها کافی است.

---

[1] برای اطلاعات کاملتر به «راهنمای مطالعه کتاب» در مقدمه جلد اول ریاضی ۱ مراجعه نمایید.

[2] به طور کلی برای حل هیچ یک از تستهای جلد اول کتاب نیازی به در نظر گرفتن زمان برای حل سؤال نیست. شما فعلاً در مرحله آموزش هستید و باید حین حل تستهای جلد اول قدرت تفکر و تجزیه و تحلیل و تجربه خود را در حل سؤالات بالا ببرید. پس از اتمام دوره تابستان برای بالا بردن سرعت حل تست و مرور مطالب باید تستهای جلد دوم را با در نظر گرفتن زمان حل نمایید.

۳) یک مرور کلی و سریع روی مطالبی که قرار است در جلسه بعدی کلاس تدریس شود، داشته باشید.

۴) در صورت داشتن وقت، سؤالات قسمت دوم تا پنجم را حل نمایید.

توجه ۱: اغلب مطالب مهم در جزوه درسی که در کلاس آنرا یادداشت نموده‌اید، وجود دارند و لذا:

نیازی به مطالعه درس کتاب در قسمت اول هر فصل نمی‌باشد.

توجه ۲: مراحل ۱ و ۲ و ۳ اجباری هستند و هر جلسه باید انجام شوند و به طور میانگین حدوداً دو برابر زمانی که در کلاس تدریس شده اند، باید برای آنها وقت بگذارید.[۳] اما مرحله ۴ (حل تستهای تکمیلی و خودآزمایی هر فصل) اختیاری است و فقط در صورتی که وقت اضافه داشتید، آنرا انجام دهید.

توضیح در مورد فصل اول ریاضی ۱

فصل اول ریاضی ۱ (تابع) در کلاس تدریس نمی‌شود و برخی مطالب مهم آن ضمن حل چند تست مورد بررسی قرار می‌گیرند. در واقع فصل تابع پیشنیاز سایر فصول است اما نیازی نیست که کلیه روابط و فرمولهای بیان شده در این فصل را حفظ نمایید. جزئیات این فصل به اندازه جزئیات کل کتاب است اما دانستن کلیات این فصل برای حل اکثر سؤالات آن کافی خواهد بود. لیستی از مهمترین مطالب و فرمولهای لازم در این فصل در صفحه ۴۳ و ۴۴ کتاب به عنوان خلاصه نکات مهم گردآوری شده است. مطالعه این موارد و مرور سریع مطالب بیان شده در این فصل کافی هستند. ضمناً نیازی به حل تمامی تستها و مثالهای موجود در این فصل نمی‌باشد. تستها و مثالهای مهمتر برای فصل ۱ و مطالب مهم و حذفی برای سایر فصول در منوی «اطلاعات مهم کنکور ⟵ روش بهینه مطالعه ریاضی عمومی» در صفحه نخست از سایت www.m-aghasi.ir قرار داده شده‌اند.

بودجه بندی سؤالات ریاضی در کنکور

یکی از مواردی که اکثر دانشجویان در مورد آن سؤال می‌پرسند، تعداد تستهایی است که از هر یک از فصلهای ریاضی عمومی در کنکور مطرح می‌شود. واقعیت آن است که سازمان سنجش قاعده مشخصی را در مورد تعداد تستهای هر فصل رعایت نمی‌کند. ممکن است از فصل خاصی در چندین سال متوالی سؤالی مطرح نشود، ولی این مورد نباید باعث شود که برای کنکور سال جاری آن فصل را حذف نمایید. [۴] کلیه مطالبی که در کلاس تدریس می‌شوند را برای کنکور مطالعه نمایید ولی چنانچه مطلبی در کنکور رشته شما به دفعات مورد سؤال بوده است، به آن توجه بیشتری نموده و در زمان نزدیک به کنکور سؤالات بیشتری از آن مبحث را حل نمایید. برای دستیابی به بودجه‌بندی سؤالات کنکور در سالهای ۸۵ تا ۹۱ به منوی «بودجه بندی سؤالات کنکور» در صفحه نخست از سایت www.m-aghasi.ir مراجعه نمایید. همچنین برای تجزیه و تحلیل آماری سؤالات کنکور ۸۷ تا ۹۱ در رشته‌های عمران و صنایع و MBA به منوی «بررسی کنکور ارشد ۸۷ تا ۹۱» در سایت مراجعه نمایید.

---

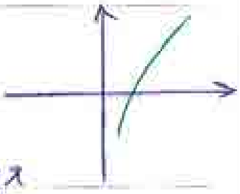
[۳] چنانچه فاصله بین دو جلسه کلاس کمتر از ۲ روز باشد، برای جلسه بعدی فقط مراحل ۱ و ۲ را انجام دهید و مرحله ۲ را برای هفته بعدی کلاس انجام دهید.

[۴] خصوصاً در اکثر رشته ها از جمله عمران و مکانیک و سیستم، سبک سؤالات در دو سال اخیر تغییرات محسوسی داشته است.

۱۶/۴۲ بیابید دامنه تابع روبرو را

$f(x)=\sqrt{\log(2x-x^2)}$

$\begin{cases}2x-x^2>0\\ \log(2x-x^2)\geq 0\end{cases} \xrightarrow[\text{صعودی است}]{\log x} 2x+x^2\geq 1$



$0\geq x^2-2x+1 \to 0\geq (x-1)^2 \to (x-1)^2=0 \to x=1$ $y=\log_a x$, $a>1$

$\to D_f=\{1\}=[1,1]$

MBA/۸۵ مطلوبست برد تابع مقابل

$f(x)=\sqrt{\log(2x-x^2)}$

ابتدا دامنه f را می‌یابیم که $D_f=\{1\}$

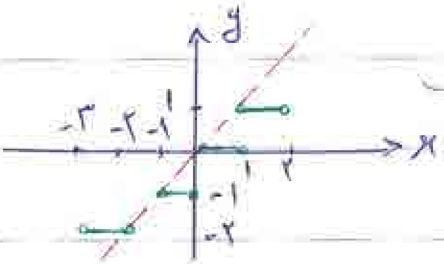
$\to R_f=\{f(1)\}=\{0\}=[0,0]$

۲۲ / ۲ ج ۶۵۷ دامنه تابع مقابل را بیابید

$f(x)=\sqrt{[x]-|x|}$

$|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$

$[x]$ ← بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x



$[x]-|x|\geq 0$ حالت اول $x<0 \to [x]-(-x)=\overbrace{\underbrace{[x]}_{\text{منفی}}+\underbrace{x}_{\text{منفی}}}^{\text{منفی}}>0$

حالت دوم $x\geq 0 \to [x]-x\geq 0 \to [x]\geq x \to [x]=x$

$\to x\in\mathbb{Z} \to x=0,1,2,3,\ldots \to D_f=\underbrace{\mathbb{N}}_{\text{اعداد صحیح مثبت}}\cup\{0\}=\overset{\text{اعداد حسابی}}{W}$

توابع هیپربولیک

عدد نپر $e \simeq ۲٫۷$

۱) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{۲}$ sh

۲) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{۲}$ ch

۳) $tgh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ به اختصار th

اتحاد $\cosh^۲ x = \sinh^۲ x + ۱ \rightarrow \cosh^۲ x - \sinh^۲ x = ۱$

۱) $\sinh^{-۱} x = Ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱})$

۲) $\cosh^{-۱} x = Ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱})$

۳) $tgh^{-۱} x = ۱/۲ \, Ln \dfrac{۱ + x}{۱ - x}$

۲۱/۲۵

$\sinh x = ۳/۴ \rightarrow tgh x = ?$

اتحاد $\cosh^۲ x = \sinh^۲ x + ۱ = (۳/۴)^۲ + ۱ = ۲۵/۱۶ \rightarrow \cosh x = \pm ۵/۴$

$\rightarrow \cosh x = ۵/۴ \rightarrow tgh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{۳/۴}{۵/۴} = ۳/۵$

۲/۲۶.۷۴۹ تعداد زوج مرتب‌های (x,y) که در معادله زیر صدق می‌کنند را بیابید (عمران ۹۰)

$x^۲ + \underline{\cosh(xy)(۲x + \cosh(xy) + ۱)} - ۱ = ۰$

$۲x\cosh(xy) + \cosh^۲(xy) + \cosh(xy)$

$\rightarrow \overset{\text{نامنفی}}{(x + \cosh(xy))^۲} + \overset{\text{نامنفی}}{(\cosh(xy) - ۱)} = ۰$ $\begin{cases} x + \cosh(xy) = ۰ \\ \cosh(xy) - ۱ = ۰ \end{cases} \rightarrow x = -۱$

$\cosh(-y) = ۱ \rightarrow y = ۰$ $(x,y) = (-۱, ۰)$ یک جواب دارد

۱۲۲
۲ج۸۵

فرض کنید $\sinh c = 3/4$ و $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}) = c$ مقدار x را برحسب $\ln 2$ و $\ln 3$ بیابید (مواد ۹۱)

$$\left.\begin{aligned}&\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}) = \sinh^{-1} e^x = c\\&\sinh c = 3/4 \to c = \sinh^{-1} 3/4\end{aligned}\right\} \quad e^x = 3/4$$

$$\to x = \ln 3/4 = \ln 3 - \ln 4 = \ln 3 - 2\ln 2$$

فصل دوم حد و پیوستگی

مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{2+\cos x}{[x^2]} = \frac{3}{0\ \text{مطلق}} =$ وجود ندارد

دامنه تابع $\frac{2+\cos x}{[x^2]}$: $[x^2]=0 \to 0\leq x^2<1 \to -1<x<1$

$D_f = R-(-1,1)$

حد تابع فوق با توجه به اینکه در دامنه وجود ندارد   وجود ندارد

مثال: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x+2}{\underbrace{3^x-1}_{\text{صعودی اکید}}} = 2/0 = +\infty$

$$\begin{cases} x\to a^+ \to f(x)\to L^+ \\ x\to a^- \to f(x)\to L^- \end{cases}$$

مثال: $\lim_{x\to\pi/4}\sqrt[4]{\underbrace{\cot g\, x-1}_{\text{نزولی}}} = \sqrt[4]{0^-} =$ وجود ندارد

حالات مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ <
- هم ارزی
- هوپیتال

تعریف هم ارزی

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=۱$ می‌گوئیم $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ هم ارزند و می‌نویسیم

$$\underset{x\to a}{f(x)\sim g(x)}$$

قواعد هم ارزی در صفر $x\to ۰$

۱) جمله دارای کمترین توان هم ارز (~) چندجمله‌ای است

۲) توابع روبرو و معکوس آنها با x هم ارزند $\sin x$ و $tg x$، $\ln(x+۱)$، $e^x-۱$، $\sinh x$، $tgh x$

۳) $۱-\cos^{\alpha}x\sim\frac{\alpha}{۲}x^۲\quad(\alpha\neq۰)$

۴) $(۱+x)^{\alpha}-۱\sim\alpha x\quad(\alpha\neq۰)$ هم ارزی رنولی

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a}g(x)=۰$ آنگاه در روابط هم ارزی به جای x می‌توان $g(x)$ را قرار داد

مثال:

$$\lim_{x\to۰}\frac{(x^۲+e^x+۳)\sin x^۲}{(tg x)\sinh ۲x}\sim\frac{۴x^۲}{x\cdot۲x}=۲$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{x^۳+۲x^۲}{\ln\cos x}\sim\frac{۲x^۲}{\cos x-۱}\sim\frac{۲x^۲}{-\frac{۱}{۲}x}=-۴$$

نکته:

$$\underset{y\to۱}{\ln y\sim y-۱}$$

۳۴ (مکانیک ۹۰)
۲ ج.۷۵

$$\lim_{x\to۰}\frac{\ln(۱+x)(۳^x-۱)}{(\arcsin x)^۲}\sim\frac{x\cdot x\ln۳}{x^۲}=\ln۳$$

$$۳^x=e^{x\ln۳}\qquad ۳^x-۱=e^{x\ln۳}-۱\sim x\ln۳$$

نکته: $a^x=e^{x\ln a}\Leftarrow\underset{x\to۰}{a^x-۱}=e^{x\ln a}-۱\sim x\ln a$

فرمول های مک لورن

۱) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

۲) $tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$

۳) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

۴) $Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

۵) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

برای محاسبه حد قواعد ذیل باید رعایت گردد

۱- در جمع و تفریق مک لورن را تا آنجا می نویسیم که جمله ای باقی بماند

۲- در جمع و تفریق همه توابع را تا توان یکسان می نویسیم

۳- اگر مخرج هم ارز x^n باشد کافی است مک لورن صورت را تا x^n بنویسیم

نکته: اگر پس از استفاده از قاعده شماره ۳ صورت کسر صفر شود آنگاه جواب صفر می باشد.

مثال:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,x - \sin x}{x \sin x} = \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}{\underbrace{x\cdot x^2}_{x^3}} = \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

۱۰/۷۱

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \frac{\qquad\qquad}{\frac{1}{3}x^2}$$

روش اول- مک لورن صورت را تا x^2 می نویسیم

بسط صورت $\dfrac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) - \left(x+0x^2\right) + \left(1-\frac{x^2}{2}\right) - 2 = 0}{\frac{1}{3}x^2} = 0$

طبق نکته با توجه به اینکه صورت صفر شده است جواب صفر می باشد

روش دوم ـ جواب اشتباه X   هم ارزی $\sim \frac{(\overset{x}{e^x-۱})-\overset{x}{\sin x}+(\overset{-۱/۲x^۲}{\cos-۱})}{۱/۳x^۲}=-۳/۲$

(قاعده شماره ۲ رعایت نشده است)

نکته: در سوالات جمع و تفریق فقط از مک لورن استفاده می کنیم

قواعد هم ارزی در بی نهایت $(x\longrightarrow\pm\infty)$

۱) چند جمله ای $\sim$ جمله دارای بیشترین توان

۲) هم ارزی رادیکال ها $\sqrt[n]{x^n+bx^{n-1}+\cdots}\sim\begin{cases}x+b/n & n\ \text{فرد}\\ |x+b/n| & n\ \text{زوج}\end{cases}$

۳) $[x]\sim x$

۴) قوانین رشد

تعریف: اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=۰$ می گوییم رشد $g(x)$ از $f(x)$ بیشتر است و می نویسیم

$$g(x)\gg f(x)$$

$$x\longrightarrow+\infty \qquad b^x\gg a^x\gg x^a\gg(\ln x)^{۱۰۰۰}$$

$$b>a>۱ \quad \text{و} \quad a>۰$$

مثال ۱: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(۳x-\sqrt{۹x^۲+۶x+۴}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}۳x-۳\sqrt{x^۲+۲/۳x+۴/۹}$

$\sim ۳x-۳\left|x+\frac{۲/۳}{۲}\right|=۳x-۳(x+۱/۳)=-۱$

مثال ۲: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۳e^x}{e^{۲x}+x^۵+(\ln x)^{۱۰}}\sim\frac{x^۳e^x}{e^{۲x}}=\frac{x^۳}{e^x}=۰$

زیرا رشد مخرج بیشتر از صورت است

حالات مبهم $\infty \times ۰$ و $\infty - \infty$

در حالات فوق تابع را با عملیات جبری تبدیل می‌کنیم به یکی از حالات $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{۰}{۰}$ و با روشهای رفع ابهام آنها مسئله را ادامه می‌دهیم

مثال: $\lim_{x \to ۰^+} x \ln x \xrightarrow{۰ \times \infty} \lim_{x \to ۰^+} \frac{\ln x}{۱/x}$

$\xrightarrow{t = ۱/x} \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln ۱/t}{t} = ۰$ زیرا رشد مخرج از صورت بیشتر است

نکته: $\ln(۰^+) = -\infty$

نکته: $\lim_{x \to ۰^+} x^{\alpha} \ln x = ۰$

$\frac{۴}{۲ج ۲۵۵}$ (عمران ۸۹)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۴x^۳-۱}{۳x^۲+۲} \cdot \sin ۱/x = \frac{۴x^۳}{۳x^۲} \cdot ۱/x = ۴/۳$$

$\frac{۱۴۵}{۲ج ۱۲۲}$ (نساجی ۸۴)

$$\lim_{t \to ۰} e^{-۱/t^۲} [۱/e^{-۱/t^۲}]$$

$x = e^{-۱/t^۲}$　　$\underset{t \to ۰}{x = e^{-۱/t^۲}} \to e^{-\infty} = ۰$

$$\lim_{x \to ۰} x [۱/x] = x \times ۱/x = ۱$$

$\frac{۲۸}{۲ج ۲۱۴}$

$$\lim_{x \to +\infty} x [\frac{x}{۲x^۲+۱}] = x \times [۰^+] = x \times \text{صفر مطلق} = \text{صفر مطلق}$$

$$\frac{x}{۲x^۲+۱} \sim \frac{x}{۲x^۲} = ۱/۲x = ۰^+$$

نکته: $\overset{\text{مطلق}}{۰} = \infty \times ۰$ مطلق نیازی به رفع ابهام ندارد و جواب صفر مطلق است

۳۲/۷۷

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x-\sin x}-\frac{6}{x^2}\right)$$

$$\lim\left(\frac{x^3-6x+6\sin x}{(x-\sin x)x^2}\right)\sim\frac{x^3-6x+6\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)}{\left(x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right)x^2}$$

$$=\frac{x^3-6x+6\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)}{\frac{x^3}{6}\cdot x^2}=\frac{\frac{1}{20}\cdot x^5}{\frac{1}{6}x^5}=\frac{3}{10}$$

نکته: درصورت مواجه با جمع و تفریق کسرها مخرج مشترک می‌گیریم

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0$$ اگر — b و a مطلوبست ۳۶/۷۷

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}\right)\sim\frac{3x-\frac{(3x)^3}{6}+ax+bx^3}{x^3}$$

$$=\frac{(a+3)x+\left(b-\frac{9}{2}\right)x^3}{x^3}\longrightarrow(a+3)x+\left(b-\frac{9}{2}\right)x^3=0$$

$$\begin{cases}a+3=0 & a=-3\\ b-\frac{9}{2}=0 & b=\frac{9}{2}\end{cases}$$

حالات مبهم نمایی (∞^0 و 1^∞ و 0^0)

هر سه مورد با استفاده از رابطه روبرو رفع ابهام می‌گردند $u^v = e^{v \ln u}$

نکته: چنانچه $f(x) \to 1$ و $g(x) \to \infty$ آنگاه $f(x)^{g(x)} \sim e^{g(x)(f(x)-1)}$

$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

مثال: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\sin 2x \ln x} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \sin 2x \ln x \sim 2x \ln x =$

۱۲۹ / ۲ج۷۶۲ (مواد ۹۰) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{1/\ln x} = 0^{1/\infty} = 0^0 = e$

$e^{1/\ln x \, \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{1/\ln x \, \ln x} = e$

۱۳ / ۲ج۵۵ (صنایع ۸۸) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)^{1/x} = \infty^0 = e$

روش اول $e^{1/x \ln(e^x - x)} = e^{\ln e^x} = e^{x \ln e} = e$

روش دوم $(\underset{\text{تداخل رشد}}{\overrightarrow{e^x - x}})^{1/x} \sim (e^x)^{1/x} = e^1$

مثال: $\lim \left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+x+2}\right)^x = 1^\infty \quad e^{x\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+x+2} - 1\right)} = e^{x\left(\frac{x-3}{x^2+x+2}\right)}$

$= e^{\frac{x^2-3x}{x^2+x+2}} = e^{x^2/x^2} = e$

$\frac{۳۰}{۲ج ۱۱۰}$ (مکانیک ۸۴

$$\lim_{x\to 0}(x+e^{2x})^{1/x} = 1^{\infty}$$

$$e^{1/x\,(x+e^{2x}-1)} = e^{\frac{x+1+2x-1}{x}} = e^{2}$$

$\frac{۱۸}{۲ج ۸۴۱}$

$$\lim_{x\to 0}(x-\sin x+\cos 2x)^{x^{-2}} = 1^{\infty}$$

$$e^{x^{-2}(x-\sin x+\cos 2x-1)} = e^{-2}$$

$$\sim \frac{x-\sin x+\cos 2x-1}{x^2} = \frac{x-x+(1-(2x)^2/2)-1}{x^2} = \frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

مجانب

۱- مجانب قائم : هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ می‌گوئیم $x=a$ مجانب قائم $f(x)$ است

۲- مجانب افقی : هرگاه $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = b\in R$ می‌گوئیم $y=b$ مجانب افقی $f(x)$ است

۳- مجانب مایل : $y=mx+h$ $(m\neq 0)$ را مجانب مایل $f(x)$ می‌نامیم هرگاه

$$m=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x \quad \text{و} \quad h=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$$

نکته : اگر تابع حاصل تقسیم دو چند جمله‌ای باشد که درجه صورت یک واحد از درجه مخرج بیشتر باشد خارج قسمت تقسیم همان مجانب مایل خواهد بود

نکته : اگر $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} mx+h$ آنگاه $y=mx+h$ مجانب است

$\frac{۱۵}{۸۲}$ مطلوبست مجانبها $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$

مجانب قائم
$$\begin{cases} x=1 & \lim_{x\to 1} f(x) = 3/2 \\ x=-1 & \lim_{x\to -1} f(x) = \infty \end{cases}$$

مجانب افقی $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \infty$ مجانب افقی ندارد

مجانب مایل

روش اول

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^۳-۱}{x(x^۲-۱)}=۱$$

$$h=\lim_{x\to\infty}(f(x)-m(x))=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^۳-۱}{x^۲-۱}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۳-۱-x^۳x}{x^۲-۱}=\frac{-(۱+x)}{x^۲-۱}=۰$$

پس $y=x$ مجانب مایل

روش دوم مجانب $y=x$

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۱ & x^۲-۱ \\ \cline{2-2} -x^۳-x & x \\ \hline x-۱ & \end{array}$$

خارج قسمت

باقیمانده

با توجه به نکته کافی است صورت را بر مخرج تقسیم نمائیم

مثال: مطلوبست مجانب‌های تابع روبرو (مجانب قائم ندارد) $f(x)=x+\sqrt{x^۲-۴x+۱}$

$$f(x)\sim x+|x+{}^{-۴}/_{۲}|=\begin{cases} x+x-۳=۲x-۳ & x\to+\infty \\ x-(x-۳)=۳ & x\to-\infty \end{cases}$$

$y=۲x-۳$ مجانب مایل

$y=۳$ مجانب افقی

نکته:

$$\sqrt{x^۲+bx+c}\simeq|x+b/a|$$

پیوستگی

تعریف ۱: $f(x)$ در $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

قواعد پیوستگی

۱- توابع ذیل در هر نقطه از دامنه خود پیوسته اند a. چندجمله‌ایها
b. مثلثاتی c. نمایی d. لگاریتمی e. هیپربولیک

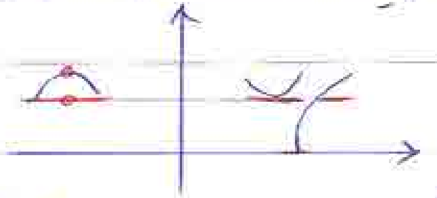
۲- معکوس توابع بالا نیز در دامنه خود (دامنه معکوس) پیوسته اند

۳- اعمال جبری و ترکیب بین توابع پیوسته نیز در دامنه پیوسته می باشد.

نکته: فرض کنید $g(x)$ پیوسته باشد و $f(x)=[g(x)]$ آنگاه

الف) $g(a) \notin Z$ آنگاه f در a پیوسته می‌باشد

ب) $g(a) \in Z$ آنگاه: f در $x=a$ پیوسته است $\Leftrightarrow$ g در a مینیمم نسبی باشد



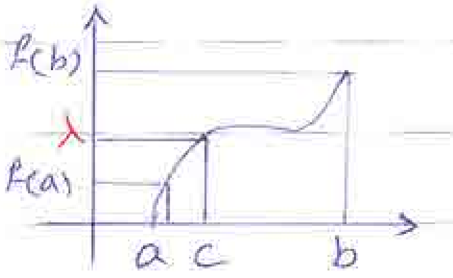
مثال: تعیین کنید تابع $f(x)=[x^2]$ در چند نقطه از بازه $(-1, 2)$ پیوسته است

کاندیدای ناپیوستگی $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ و ۱ و ۰ $\quad 0 < x^2 < 4$

چون $g(x)=x^2$ در $x=0$ مینیمم می‌شود پس f در این نقطه پیوسته است و چون در سایر نقاط g مینیمم نیست پس f در $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ و ۱ ناپیوسته می‌باشد و لذا دقیقاً در سه نقطه ناپیوسته است ۳ و ۲ و ۱ و ۰

نکته: در توابع براکتی کاندیدای ناپیوستگی نقاطی هستند که تابع داخل براکت صحیح باشد

قضیه مقدار میانی



فرض کنید $f(x)$ در $[a, b]$ پیوسته باشد $f(a) < \lambda < f(b)$ آنگاه c ای $a < c < b$ موجود است که $f(c)=\lambda$

کاربرد: اگر $f(a)f(b) < 0$ و تابع f روی $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه بین a و b حداقل یک ریشه وجود دارد

مثال: آیا معادله $۵x=۲^x$ در [۰و۱] دارای جواب است

$f(x)=۲^x-۵x$ پیوسته

$f(۰)=۱>۰$ و $f(۱)=۲-۵=-۳<۰$

پس f بین ۰و۱ حداقل یک ریشه دارد و پس معادله داده شده روی بازه [۰و۱] جواب دارد

نکته: اگر f پیوسته و یکنوای اکید باشد

الف: اگر $f(a)f(b)<۰$ تابع f روی [a,b] یک ریشه دارد

ب: اگر $f(a)f(b)>۰$ تابع f روی [a,b] فاقد ریشه است.

فصل سوم مشتق

تعریف مشتق

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

وچنانچه $f'(a)$ عدد حقیقی شود می‌گوئیم f در a مشتق‌پذیر است

نکته: رابطه $f'(a)=\lim_{x\to a}f'(x)$ وقتی برقرار است که

۱) f در a پیوسته باشد

۲) $\lim_{x\to a}f'(x)$ وجود داشته باشد (عدد یا ∞ شود)

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}x^2\sin 1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ مطلوبست $f'(0)$

روش اول: تعریف مشتق $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\frac{x^2\sin 1/x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}x\sin x=0 \qquad f'(0)=0$

روش دوم (فرمولهای مشتق) تابع f در صفر پیوسته است

$f'(x)=2x\sin 1/x-\cos 1/x=$ وجود ندارد نادرست است

نکته: $0=0\times$ تابع کراندار

نکته: در نقاطی که تابع مورد دارد مشتق این است که از تعریف مشتق مسئله را حل می‌کنیم و در سایر موارد از فرمولهای مشتق استفاده می‌کنیم

مثال: تعیین کنید $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in Q \\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ در چه نقاطی مشتق پذیر است

پس تابع در $x\neq 0$ ناپیوسته است $x^2=0 \to x=0$ پیوستگی

پس در $x\neq 0$ مشتق پذیر نیست اما باید مشتق پذیری در $x=0$ بررسی شود

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-0}{x-0}=\frac{x^2}{x}=x=0$$

پس در $x=0$ مشتق پذیر است

نکته: توابعی مانند توابع مثال فوق فقط در نقاطی حد دارند و پیوسته اند که دو ضابطه مساوی باشند

۳۹
۲ج ۵۵۳

اگر برای تابع f با دامنه R داشته باشیم

$$f(x_1+x_2)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

مطلوبست $f'(x)$ (مانند ۸۸ و ۹۰)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)f(h)}-f(x)}{h}$$

$$=\frac{f(h)+f^2(x)f(h)}{h(1-f(x)f(h))}=\frac{f(h)(1+f^2(x_1))}{h(1-f(x)f(h))}=(1+f^2(x))\lim\overset{1}{\frac{f(h)}{h}}\cdot\frac{1}{1-f(x)f(h)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1 \quad f(h)\sim h \to \lim_{h\to 0}f(h)=0$$

$$\to f'(x)=1+f^2(x)$$

مشتق لگاریتمی

در موارد زیر برای محاسبه $f'(x)$ ابتدا $Lnf(x)$ را تشکیل داده و سپس مشتق می‌گیریم

۱) $f(x)=u(x)^{v(x)}$

۲) اگر تابع $f(x)$ به صورت ضرب و تقسیم تعداد زیادی از توابع باشد

$\frac{۳۵}{۲ج ۷۵۰}$ (اکاسیف ۹۰) مشتق $y=x^{\sqrt{x}}$ در $x=٤$ را بیابید

$$Lny=\sqrt{x}\,Lnx \xrightarrow{\text{مشتق}} y'/y=\frac{1}{۲\sqrt{x}}Lnx+\sqrt{x}/x \to y'/۱۶=۱/٤\,Ln٤+۱/۲$$

$$y=٤^{\sqrt{٤}}=۱۶ \to y'=٤Ln٤+۸=۸(۱+Ln۲)$$

$\frac{۹}{۲ج ۸۴۰}$ فرض کنید $f(x)=\frac{(x+۲)^۳(x^۲+۱)^٤}{(x^۳+۱)^۲}$ مطلوبست $f'(۱)$

$$Lnf(x)=۳Ln(x+۲)+٤Ln(x^۲+۱)-۲Ln(x^۳+۱)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{۳}{x+۲}+\frac{۸x}{x^۲+۱}-\frac{۶x^۲}{x^۳+۱} \qquad \frac{f'(۱)}{f(۱)}=\frac{۳}{۳}+\frac{۸}{۲}-۶/۲=۲$$

$$f(۱)=\frac{۳^۳\times ۲^٤}{۲^۲}=۱۰۸ \qquad f'(۱)=۲\times۱۰۸=۲۱۶$$

مشتق از تابع معکوس

$$f(a)=b \Leftrightarrow (a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)\neq۰}$$

مشتق ضمنی :

$$F(x,y)=۰ \to y'=dy/dx=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

مشتق پارامتری

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \to dy/dx=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$\frac{١٦}{١٢٤}$ اگر $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\geq 0\\ 1-x^3 & x<0\end{cases}$ مطلوبست: $(f^{-1})'(-1)$

$f(x)=-1 \begin{cases} x\geq 0 : -x^2=-1 \rightarrow x=1 \\ x<0 : 1-x^3=-1 \rightarrow x\sqrt[3]{2} \end{cases} \rightarrow a=1$

$f(x)=-x^2 \rightarrow f'(x)=-2x \rightarrow f'(1)=-2$

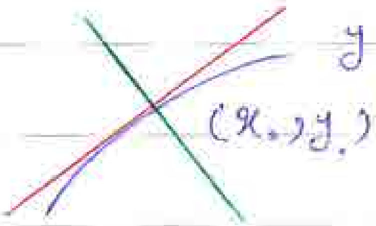
$(f^{-1})'(-1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{-2\times 1}=-1/2$

$\frac{١٧}{١٢٥}$ اگر $\ln(x^2+y^2)+2\,tg^{-1}\,x/y=0$ مطلوبست dy/dx

$$dy/dx=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{2/y}{1+(x/y)^2}}{\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{-2x/y^2}{1+(x/y)^2}}=-\frac{\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2}}{\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{2x}{y^2+x^2}}$$

$$=-\frac{2x+2y}{2y-2x}=-\frac{x+y}{y-x}$$

کاربرد هندسی مشتق

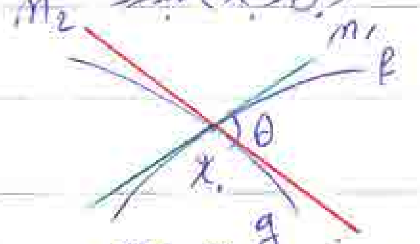


$y=f(x)$

شیب مماس $=f'(x_0)$

شیب قائم $=-\frac{1}{f'(x_0)}$

معادله خط با شیب m که از نقطه (x_0,y_0) بگذرد: $y-y_0=m(x-x_0)$



زاویه بین دو نمودار

زاویه بین دو نمودار (نقطه برخورد) عبارت است از

کوچکترین زاویه بین خط مماس با آنها در نقطه برخورد

$tg\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+(m_1m_2)}\right| \quad 0\leq\theta\leq\pi/2$

۱۶ / ۲ج،۱۶　زاویه بین $y=e^x$ و $y=1-x^2$ در $x=0$ را بیابید.

$$\begin{cases} y=e^x \longrightarrow y'(0)=e^x|_{x=0}=1=m_1 \\ y=1-x^2 \longrightarrow y'(0)=(-2x)|_{x=0}=0=m_2 \end{cases}$$

$$tg\theta=\left|\frac{m_2+m_1}{1+m_1m_2}\right|=1 \longrightarrow \theta=\pi/4$$

مشتق مراتب بالا

$$f(x)\longrightarrow f'(x)\longrightarrow f''(x)\longrightarrow \cdots f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$$

۲۹ / ۱۴۵　اگر $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ مطلوبست $f'(0)$ و $f''(0)$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}\xrightarrow{t=1/x}\lim_{t\to\pm\infty}\frac{e^{-t^2}}{1/t}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2/x^3\, e^{-1/x^2}}{x}\xrightarrow{t=1/x}\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2t^3e^{-t^2}}{1/t}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2t^4}{e^t}=0 \qquad f''(0)=0$$

۳۱ / ۱۳۶　در $\begin{cases} x=t^2-t \\ y=t^2+t \end{cases}$ مطلوبست $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t=0$

$$y'=dy/dx=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2t+1}{2t-1}$$

$$d^2y/dx^2=dy'/dx=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{-4}{(2t-1)^2}}{2t-1}=\frac{-4}{2t-1}=4$$

۶/۱۹۹ اگر $x^2-y^2=1$ مطلوبست $\frac{d^2y}{dx^2}$ ۱) x^{-3} ۲) y^{-3} ۳) $-x^{-3}$ ۴) $-y^{-3}$ ✓

$F=x^2-y^2-1=0 \qquad y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x}{-2y}\to y'=\frac{x}{y}$

$\to yy'=x \xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{با فرض y تابع x}} y'^2+yy''=1\to y''=\frac{1-y'^2}{y}$

$y''=\frac{1-(x/y)^2}{y}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}=-y^{-3}$

نکته: اگر $y=u\cdot v$ آنگاه

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k}v^{(n-k)} \qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\ u^{(0)}=u,\ u^{(1)}=u'$$

مثال: اگر $f(x)=\underbrace{(2x+1)}_{u}\overbrace{e^{4x}}^{v}$ مشتق دهم این تابع را بیابید

$$f^{10}(x)=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}u^{(k)}v^{(10-k)}$$

$$=\underset{k=0}{\binom{10}{0}u^{(0)}v^{(10)}}+\underset{k=1}{\binom{10}{1}u^{(1)}v^{(9)}}+\binom{10}{2}u^{(2)}v^{(8)}$$

$$=4^{10}(2x+1)e^{4x}+20\times4^{9}e^{4x}$$

نکته: برای تابع $f(x)$ داریم

$f^{(n)}(0)=($ضریب x^n در بسط $f(x))\times n!$

مثال: مشتق پنجم تابع $f(x)=x^2\ln(1+x)$ را در $x=0$ بدست آورید

بسط مک لورن f را تا x^5 می‌نویسیم $f(x)=x^2(x-x^2/2+x^3/3\ \ldots)$

$=x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^5 \qquad f^{(5)}(0)=\frac{1}{3}\times5!=\frac{1}{3}\times120=40$

نکته: اگر $f(a)=0$ برای مشخص کردن مرتبه تکرار a آنقدر از f در a مشتق می‌گیریم تا مشتق مخالف صفر شود آنگاه: شماره یا مرتبه اولین مشتق ناصفر f در a ⟸ مرتبه تکرار ریشه

مثال: عدد $x=\pi$ ریشه با چه مرتبه تکراری برای $f(x)=1+\cos x$ است

$f(\pi)=0$ $\quad f'(x)=-\sin x$ $\quad f'(\pi)=0$

$f''(x)=-\cos x$ $\quad f''(\pi)\neq 0$

عدد $x=\pi$ ریشه با تکرار دو است که اصطلاحا ریشه مضاعف گویند

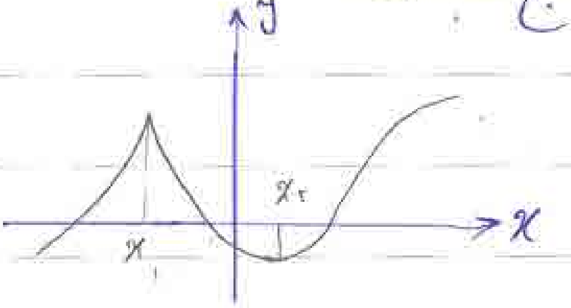
کاربرد مشتق

قضیه: اگر تابع $f(x)$ روی بازه I مشتق پذیر باشد.

الف) اگر $f'(x) > 0$ آنگاه $f(x)$ صعودی اکید است

ب) اگر $f'(x) < 0$ آنگاه $f(x)$ نزولی اکید است

ج) اگر $f'(x)=0$ آنگاه $f(x)$ تابع ثابت است



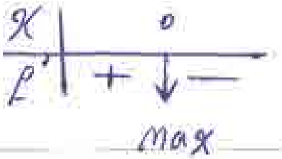
اکسترمم نسبی (نقطه بحرانی)

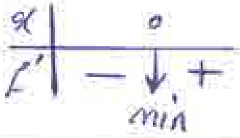
۱- نقاطی که مشتق در آن صفر شود

۲- نقاطی که f مشتق پذیر نیست

آزمون مشتق اول

اگر $f(x)$ در a بحرانی و پیوسته باشد





۱۶/۱۵۰. برای تابع روبرو باید نقاط بحرانی و نوع آن‌ها را $f(x)=x^2e^{-x^2}$

$f'(x)=2xe^{-x^2}-2x^3e^{-x^2}=2xe^{-x^2}(1-x)(1+x)=0$

تذکر ۹ ص ۲۰ $\to x=0$ و ۱ و ۱-

x		-1		0		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
		max		min		max	

۳۹/۱۵۱ (عمران ۸۶) معادله $tgx+x^3=2$ در $[0,\pi/4]$ چند جواب دارد؟

$f(x)=3tgx+x^3-2$ پیوسته $f'(x)=3(1+tg^2x)+3x^2>0$ صعودی اکید

پس f دقیقاً یک ریشه دارد. $f(0)=-2<0$ و $f(\pi/4)=3+(\pi/4)^3-2>0$

۴۰/۱۵۱ معادله روبرو چند جواب دارد $x^2-x\sin x-\cos x=0$ داخل $(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=x(2-\cos x)=0 \to x=0$ حالت اول $x>0 \to$ صعودی اکید

یک ریشه دارد $f(0)=-1<0\ ,\ f(+\infty)=+\infty>0$

x		0	
f'	$-$	0	$+$

پس f دقیقاً یک ریشه دارد $f(0^-)=-1<0$ و $f(-\infty)=+\infty>0$ نزولی اکید $\to x<0$ حالت دوم

نتیجه f دقیقاً دو ریشه دارد

نکته ۱: جهت محاسبه تعداد ریشه‌های توابع باید تعداد ریشه‌های f را در بازه‌هایی که علامت f' ثابت است (با تعیین علامت f در دو سر بازه) محاسبه نمائیم.

۳۵/۲۶.۸۴۴ (مکانیک ۹۱) کدام گزینه درست است؟

۱) $x>0,\ \ln(1+x)>\frac{2x}{x+2}$		۲) $x>-1,\ \ln(1+x)>\frac{2x}{x+2}$

۳) $x>0,\ \ln(1+x)<\frac{2x}{x+2}$		۴) $x>-1,\ \ln(1+x)<\frac{2x}{x+2}$

روش اول: توجه کنید $\ln(1+x)$ و $\frac{2x}{x+2}$ به ازای x برابر صفر می‌شوند یعنی ۲ و ۴

نادرست است گزینه ۱ صحیح است $\to 1 \to \frac{2x}{x+2}$ و $x\to+\infty:\ \ln(1+x)\to+\infty$

روش دوم: هدف بررسی این مطلب است که $\ln(1+x)$ بزرگتر است یا $\frac{2x}{x+2}$

تعریف می‌کنیم $f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}$ و آن را تعیین علامت می‌کنیم

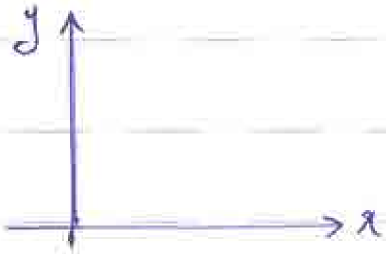
$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}=0 \to x=0 \qquad x>-1$$

x	-1	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$$x>0 \to f(x)>0 \to \ln(1+x)>\frac{2x}{x+2}$$

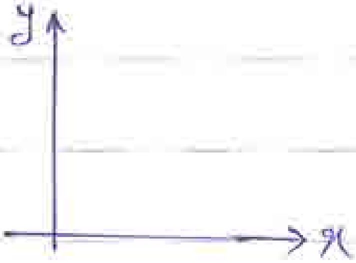
$$-1<x<0 \to f(x)<0 \to \ln(1+x)<\frac{2x}{x+2}$$

تقعر و عطف:



تقعر f رو به بالا است

$f''(x)>0$



تقعر f رو به پایین است

$f''(x)<0$

تعریف: نقطه عطف نقطه‌ای است که

۱) تابع در آن خط مماس دارد

۲) تقعر f حول آن تغییر کند

کاندیدای عطف

۱) نقاطی که f'' صفر شود

۲) نقاطی که f'' موجود نباشد

$\frac{۲۳}{۲ج ۸۴۱}$ (۹۱ MBA) $y = 1/x \, e^{-x^2}$ مطلوبست طول نقاط عطف ؟

$y' = -\frac{1}{x^2} e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = -e^{-x^2}(1/x^2 + 2) \to y'' = e^{-x^2}(\frac{2}{x} + 4x) + 2/x^3 \, e^{-x^2}$

$= e^{-x^2}\left(\frac{2x^4 + 4x^2 + 2}{x^3}\right) = 0 \to x = 0$

x=۰ کاندیدای عطف است و تقعر حول آن عوض می‌شود اما چون در دامنه نیست

پس مماس ندارد ← عطف ندارد

آزمون مشتق دوم

فرض کنید $f'(a) = 0$ آنگاه:

الف) اگر $f''(a) > 0$ آنگاه a مینیمم نسبی است

ب) اگر $f''(a) < 0$ آنگاه a ماکزیمم نسبی است

تعمیم آزمون مشتق دوم:

فرض کنید $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ و $f^{(n)}(a) \neq 0$ یعنی n اولین مرتبه مشتق غیرصفر f در a باشد آنگاه:

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

نتیجه: نمودار f و هم ارز آن حول x=a یکسان هستند پس:

الف: اگر n زوج و $f^{(n)}(a) > 0$ آنگاه a مینیمم نسبی است.

ب: اگر n زوج و $f^{(n)}(a) < 0$ آنگاه a ماکزیمم نسبی است.

ج: اگر n فرد (n>1) آنگاه a عطف می‌باشد

مثال: اگر $f(x) = x - \sin x$ در نقطه $x=0$ الف) هم ارز f را بیابید.

ب) نوع نقطه صفر را تعیین کنید.

الف) $f'(x) = 1 - \cos x$ و $f'(0) = 0$　　$f''(x) = \sin x$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = \cos x$ و $f'''(0) = 1 \neq 0 \to n = 3$　　$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} f(0) + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3$

$\to x - \sin x \underset{x \to 0}{\sim} 1/6\, x^3$

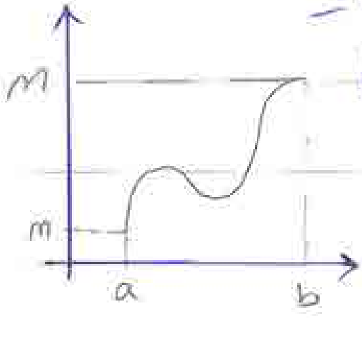
ب) چون $n = 3$ فرد است پس $x=0$ عطف است

اکسترمم مطلق

قضیه: اگر تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه f الزاماً اکسترمم مطلق دارد

روش محاسبه: ۱- نقاط بحرانی داخل بازه　۲- نقاط ابتدا و انتهای بازه

با مقایسه مقادیر $f(x)$ در نقاط بالا اکسترمم مطلق بدست می آید



نکته: اگر $f(x)$ پیوسته باشد: $R_f = [m, M]$

M: مقدار ماکزیمم مطلق　　m مقدار مینیمم مطلق

$\frac{31}{171}$ برد $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ را بیابید.

داریم: $4 - x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 4 \to -2 \leq x \leq 2$　　$D_f = [-2, 2]$

$f'(x) = 1 + \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$　　$\sqrt{4 - x^2} = x^2 \to 4 - x^2 = x^2$

$2x^2 = 4$　$x = \pm\sqrt{2} \to x = \sqrt{2}$　　$R_f = [-2, 2\sqrt{2}]$

$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ ماکزیمم مطلق　$f(2) = 2$　　$f(-2) = -2$ مینیمم مطلق

۷۱/۱۷۴ مطلوبست ماکزیمم و مینیمم مطلق $f(x) = (1/x)^x = y$ پیوسته

دامنه: $1/x > 0 \to x > 0 \to D_f = (0, +\infty)$

$\ln y = x\ln 1/x = -x\ln x \xrightarrow{\text{مشتق}} y'/y = -\ln x - 1 \to y' = -(1/x)^x(1+\ln x) = 0$

$1+\ln x = 0 \to \ln x = -1 \to x = e^{-1}$

$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}(1/x)^x = 0^{+\infty} = 0$

$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+}(1/x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln 1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x\ln x} = e^0 = 1$

$f(e^{-1}) = e^{1/e}$ $f(0^+) = 1$ $f(+\infty) = 0$

توجه کنید که صفر کمترین مقدار f است اما از حد بدست آمده است پس مینیمم مطلق وجود ندارد ولی $\max(f) = e^{1/e}$

$R_f = (0, e^{1/e}]$

نکته: اگر $x, y > 0$ بطوریکه $x+y$ ثابت باشد. آنگاه $x^\alpha y^\beta$ وقتی ماکزیمم است که: $x/\alpha = y/\beta$ (نکته ۳۷ فصل مشتق)

نکته: اگر $x, y > 0$ بطوریکه $x^\alpha y^\beta$ عدد ثابت باشد. آنگاه $x+y$ وقتی مینیمم است که $x/\alpha = y/\beta$

۱۸/۲ج۱۶ درکره به شعاع $\sqrt{۶}$ استوانه ای با حجم ماکزیمم محاط می کنیم شعاع قاعده استوانه را بیابید (صنایع سیستم ۸۳ و ۹۰)

$v = \pi r^۲ h \qquad r^۲ + (h/۲)^۲ = ۶$

$\to h = ۲\sqrt{۶ - r^۲} \to v = ۲\pi r^۲\sqrt{۶ - r^۲}$

$v = ۲\pi(r^۲)(۶ - r^۲)^{۱/۲} \qquad \frac{r^۲}{۱} = \frac{۶ - r^۲}{۱/۲} \to r = ۲ \to h = ۲\sqrt{۲}$

۴۴ / ج۲ ۱۹ حجم استوانه محاط در مخروط قائم حداکثر چند برابر حجم مخروط است

۱) ۲/۳ ۲) ۴/۹ ۳) ۵/۹ ۴) ۱۶/۲۷

هدف یافتن ماکزیمم حجم استوانه محاط در مخروط است

$V = \pi r^۲ h$ حجم استوانه $\qquad \frac{r}{۱} = \frac{۱-h}{۱} \to r = ۲/۳$

$V = \pi(۱-h)^۲ h \xrightarrow{max} \frac{۱-h}{۲} = h/۱ \to h = ۱/۱/۳$

$V_{max} = \pi(۱-۱/۳)^۲ ۱/۳ = ۴\pi/۲۷$

نسبت (حداکثر) $= \frac{V_{max}}{V_{مخروط}} = \frac{۴\pi/۲۷}{۱/۳\pi(۱)^۲(۱)} = ۴/۹$

نسبت‌های وابسته

۶۰ / ج۲ ۸۴۶ در یک ظرف مخروطی که شعاع قاعده آن ۳ متر و ارتفاع آن ۴ متر است آب را با سرعت ۵ مترمکعب در ثانیه می‌ریزیم. زمانی که سطح آب دارای ارتفاع ۲ متری قرار می‌گیرد، سرعت بالا آمدن آب در ظرف چقدر است dh/dt

$V_{حجم آب} = \pi/۳ r^۲ h \to V = ۳\pi/۱۶ h^۳$

$r/۳ = h/۴ \to r = ۳/۴ h$

$\to V = ۳\pi/۱۶ h^۳ \xrightarrow{d/dt} dV/dt = \frac{۹\pi}{۱۶} h^۲ \frac{dh}{dt}$

$\xrightarrow{عددگذاری} ۵ = ۹\pi/۱۶ (۲)^۲ dh/dt \to dh/dt = ۲۰/۹\pi$

فرایندهای نمایی

فرض کنید $x = x(t)$ با گذشت زمان طوری تغییر کند که آهنگ تغییرات آن در هر لحظه، متناسب با مقدار x در آن لحظه باشد

$dx/dt = kx \quad (k \neq ۰) \to x(t) = x_۰ e^{kt}$

$x_۰$: مقدار x در $t=۰$

نکته: $\frac{x(t_2)}{x(t_1)}=e^{k\Delta t}$ و $\Delta t=t_2-t_1$

پس در هر فرایند نمایی نسبت مقدار x در دو زمان مختلف فقط به Δt وابسته است ← اگر Δt ثابت باشد نسبت هم ثابت می‌ماند

$\frac{84}{181}$ نسبت درگذشتگان یک جمعیت ۹ در هزار و نسبت متولدین ۲۱ در هزار آن جمعیت است و این نسبت‌ها همیشه برقرار می‌ماند پس از گذشت چند سال جمعیت ۲ برابر می‌شود؟ $Ln2 \simeq 0/69$

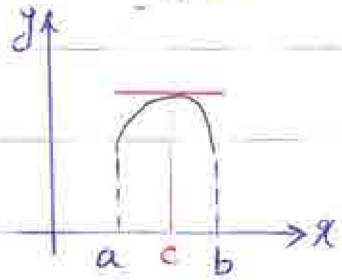
جمعیت $x=x(t)$ $\xrightarrow{}$ سال نرخ افزایش $=\frac{12}{1000}$

$$\frac{x(t_2)}{x(t_1)}=2=e^{\frac{12}{100}\Delta t}\rightarrow \frac{12}{1000}\Delta t=Ln2$$

$$\Delta t=\frac{1000\,Ln2}{12}\simeq\frac{690}{12}=57/5$$ سال

قضیه رل

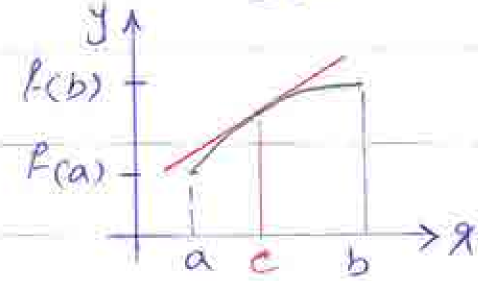
فرض کنید $f(x)$ روی $[a و b]$ پیوسته و روی $(a و b)$ مشتق‌پذیر و $f(a)=f(b)$ آنگاه $a<c<b$ موجود است که $f'(c)=0$



قضیه مقدار میانگین

فرض کنید f روی $[a و b]$ پیوسته و روی $(a و b)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه $a<c<b$ موجود است که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

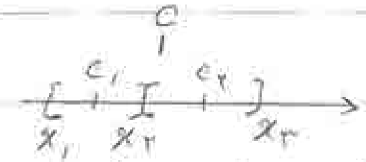


کاربرد: اگر برای $a<x<b$ داشته باشیم $m < f'(x) < M$ آنگاه

تغییرات تابع

$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$

مثال: اگر $f(x)$ دوبار مشتق‌پذیر و دارای ۳ ریشه متمایز باشد تعیین کنید معادله $f''(x)=0$ چند جواب دارد



x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های f

$f(x_1)=0$ و $f(x_2)=0 \xrightarrow{\text{رل}} f'(c_1)=0$

$f(x_2)=0$ و $f(x_3)=0 \xrightarrow{\text{رل}} f'(c_2)=0$

حال قضیه رل را برای $f'(x)$ در بازه $[c_1, c_2]$ می‌نویسیم بنابراین قضیه $c_1<c<c_2$ موجود است که $f''(c)=0$ پس معادله $f''(x)=0$ حداقل یک جواب دارد

نتیجه: اگر تابع $f(x)$ دارای n ریشه متمایز باشد آنگاه $f^{(k)}(x)=0$ حداقل دارای n-k ریشه است $(k<n)$

۳۰
۲ج ۶۵۷

فقط با استفاده از قضیه مقدار میانگین تعیین کنید $tg^{-1}7 - tg^{-1}3$ در چه بازه‌ای قرار دارد (MEAN) $\leftarrow$ باید برای تابع $f(x)=tg^{-1}x$

در بازه $[3, 7]$ قضیه مقدار میانگین را می‌نویسیم. پس $3<c<7$ موجود است که:

$$f'(c)=\frac{f(7)-f(3)}{7-3}=\frac{tg^{-1}7-tg^{-1}3}{4} \rightarrow tg^{-1}7-tg^{-1}3=4f'(x)=\frac{4}{1+c^2}$$

برای $3<c<7$ باید اکسترمم مطلق بیابیم

$c=3 \rightarrow \frac{4}{1+c^2}=\frac{4}{1+9}=0/4$

$c=7 \rightarrow \frac{4}{1+c^2}=\frac{4}{1+49}=0/08$

$0/08 < \frac{4}{1+c^2} < 0/4$

$0/08 < tg^{-1}7 - tg^{-1}3 < 0/4$

قاعده هوپیتال : $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\downarrow}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به شرط آنکه پاسخ حد برابر عدد یا ∞ باشد

$\frac{۲۹}{۱۶۹}$ (مکانیک ۸۹)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln} \overset{0/0}{=} \lim\frac{x^x(1+\ln x)-1}{-1+1/x} \overset{Hop}{=} \lim\frac{x^x(1+\ln x)^2+x^x\cdot\frac{1}{x}}{-1/x^2} \to = -2$$

$$y=x^x \to \ln y = x\ln \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y}=\ln x+1 \to y'=x^x(1+\ln x)$$

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}} = 1^{\infty} \to e^{tg(\frac{\pi x}{2})(2-x-1)}$$ $\frac{۲۰۹}{۱۱۱}$

توان $$\lim_{x\to 1}(1-x)\,tg\frac{\pi x}{2} = \lim\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}(1+\cot^2\frac{\pi x}{2})} = 2/\pi$$

جواب $= e^{2/\pi}$

دیفرانسیل و تقریب خطی

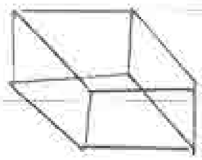
تعریف : برای تابع $y=f(x)$ دیفرانسیل عبارت است از:

$$dy=df=f'(x)\,dx$$

$$f(x_0+\Delta x)\simeq f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x_0)=dy}$$

$$\to f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\simeq df \to \Delta f\simeq df$$

مثال ۱: اضلاع یک مخزن مکعبی به طول ضلع ۱۰ متر در اثر حرارت ۲ سانتیمتر بزرگ‌تر شوند مقدار سطح مکعب حاصل را به صورت تقریبی بیابید



سطح $S(x) = ۶x^۲$

$x_۰ = ۱۰$, $\Delta x = ۰٫۰۲$

۲٫۴

$S(۱۰٫۰۲) \simeq S(۱۰) + S'(۱۰)\,\Delta x = ۶۰۰ + ۱۲۰ \times ۰٫۰۲ = ۶۰۲٫۴$

نکته ۱: افزایش تقریبی سطح مکعب = ΔS

فصل چهارم

انتگرال

$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x\,dx = \sin x + c$

تابع اولیه
انتگرال نامعین
ضد مشتق

فرمولهای انتگرال

$\int f(x)\,dx$ روشهای انتگرال گیری

۱) روش تغییر متغیر (جانشینی)

مثال:

$$\int \frac{x^3}{x^4+64} \xrightarrow[du=2x\,dx]{u=x^2} \int \frac{\frac{1}{2}\,du}{u^2+64} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\,tg^{-1}\frac{u}{8}+c$$

$$= \frac{1}{16}\,tg^{-1}\frac{x^2}{8}+c$$

مثال:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^5}}{x^2(1+2x^2)}\,dx = \int x\sqrt{1+2x^2}\,dx$$

$u=1+2x^2 \;,\; du=4x\,dx \quad \int \frac{1}{4}u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}u^{4/3}+c$

$$= \frac{3}{16}(1+2x^2)^{4/3}+c$$

مثال

$$\int \frac{dx}{1+e^x} \quad \int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$= \int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = x - Ln(Lne^x)+c$$

روش دوم

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{-x}+1} = -Ln(\overset{x^{-1/x}}{e^{-x}}+1)+c = -Ln\frac{1+e^x}{e^x}+c$$

$$= -Ln(1+e^x)+Lne^x+c = x-Ln(1+e^x)+c$$

۲- انتگرال از توابع مثلثاتی

محاسبه $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

الف) اگر m یا n یا هر دو فرد باشند از یکی از توانهای فرد یک واحد خارج کرده و با اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ آنچه باقی می‌ماند را برحسب نسبت مثلثاتی دیگر می‌نویسیم و سپس u را همان نسبت مثلثاتی دیگر می‌گیریم

ب) m و n هر دو زوج باشند کل انتگرال را یا فقط برحسب sin یا فقط برحسب cos می‌نویسیم و از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

مثال) $\int \sin^3 x + \cos^5 x\, dx = \int \sin x(\cos^5 x - \cos^7 x)\,dx$

$u = \cos x$ و $du = -\sin dx$ $\int -(u^5 + u^7)\,du$

$= -\frac{1}{6}\cos^6 x + \frac{1}{8}\cos^8 x + C$

محاسبه $\int tg\, x^m + sec^n x$

الف) اگر n زوج باشد قرار دهید $u = tg x$

ب) اگر m فرد باشد قرار دهید $u = sec x$

ضمناً ممکن است اتحاد $1 + tg^2 x = sec^2 x$ مورد نیاز

۴-الف ۲۵. $\int tg^5 x\, sec^4 x\, dx \quad u = tg x \rightarrow du = sec^2 x\, dx$

انتگرال $= \int u^5(1+u^2)\,du = \int (u^5 + u^7)\,du$

$= \frac{1}{6} tg^6 x + \frac{1}{8} tg^8 x + c$

محاسبه انتگرال کسرگویا شامل $\sin x$ و $\cos x$

قرار دهیم $z=tg\frac{x}{2}$ و داریم: $\sin=\frac{2z}{1+z^2}$ و $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$

$\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$

$$\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+5}\qquad z=tg\frac{x}{2}$$

۱۶۳
۲ ج.۴۲۶

$$\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{8z}{1+z^2}+\frac{3(1-z^2)}{1+z^2}+5}=\int\frac{2dz}{2z^2+8z+8}=\int\frac{dz}{z^2+4z+4}$$

$$=\int(z+2)^{-2}dz=-\frac{1}{z+2}+c=\frac{1}{2+tg\frac{x}{2}}+c$$

محاسبه $\int\frac{dx}{a\sin^2x+b\cos^2x+c}$

ابتدا صورت و مخرج را بر $\cos^2x$ تقسیم کرده و سپس قرار می‌دهیم $z=tgx$

$$\int\frac{dx}{4\sin^2x+25\cos^2x}=\int\frac{\sec^2x\,dx}{4tg^2x+25}$$

۱۴
۲ ج.۴۴۲

$$z=tgx\quad\int\frac{dz}{4z^2+25}=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^2+(5/2)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5/2}tg^{-1}\frac{z}{5/2}+c$$

$$=10\,tg^{-1}(\tfrac{2}{5}tgx)+c$$

۳- انتگرال توابع رادیکالی

برای محاسبه انتگرال شامل $\sqrt[n]{x}$ قرار می دهیم $x=t^n$ تا رادیکال حذف گردد

(چنانچه n زوج باشد فرض کنید $t\geq 0$)

در موارد زیر با تغییر متغیر مثلثاتی مسأله را حل می کنیم

۱) $\sqrt{a^2-x^2} \to x=a\sin t \qquad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

۲) $\sqrt{a^2+x^2} \to x=a\,tg\,t \qquad -\pi/2 < t < \pi/2$

۳) $\sqrt{x^2-a^2} \to x=a\sec t \qquad t\in[0,\pi]-\{\pi/2\}$

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}} \xrightarrow[t\geq 0]{x=t^2} \int\frac{2t\,dt}{t^2-t}=\int\frac{2\,dt}{t-1}$$
$$=2\ln|t-1|+c=2\ln|\sqrt{x}-1|$$

(عمران ۸۳)

۳
۲ج.۱۵

مثال

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dx}{(\sqrt{(x^2+1)})^3}\xrightarrow{x=tgt}\int\frac{\sec^2t}{(\underbrace{\sqrt{tg^2t+1}}_{|\sec t|})^3}dt$$

$$=\int\frac{\sec^2t}{\sec^3t}dt=\int\cos t\,dt=\sin t+c=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$$

۴- روش جزء به جزء

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

- انتگرال از اعضای گروه ۱ ← u
- انتگرال از ضرب $\overset{\to u}{(۱)}$ در (۲) یا ضرب $\overset{\to u}{(۲)}$ × (۳)
- انتگرال از ضرب گروه (۳) در یکدیگر

گروه ۳	گروه ۲	گروه ۱
نمایی سینوس و کسینوس	چند جمله ای	لگاریتم آرک

مثال:

$\int \ln x\, dx \qquad u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$

مثال:

$I = \int \sec^3 x\, dx = \int \overset{u}{\sec} \cdot \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{dv} = \sec x\, tg x - \int tg^2 x \sec x\, dx$

$= \sec x\, tg x - \int \sec^3 x - \sec x\, dx = \sec x\, tg x - \underbrace{\int \sec^3 x\, dx}_{I} + \int \sec x\, dx$

$\rightarrow I = \frac{1}{2} (\sec x\, tg x + \ln |\sec x + tg x|) + c$

$du = \sec x\, tg x\, dx \quad , \quad v = tg x$

مثال:

$\int (x^2 - x + 4) e^{3x} dx$

انتگرال	مشتق	
e^{3x}	$x^2 - x + 4$	+
$\frac{1}{3} e^{3x}$	$2x - 1$	−
$\frac{1}{9} e^{3x}$	2	+
$\frac{1}{27} e^{3x}$	0	−

انتگرال $= (x^2 - x + 4) \frac{e^{3x}}{3} - (2x - 1) \frac{e^{3x}}{9} + \frac{2}{27} e^{3x} - \cancel{\int 0 \times \frac{1}{27} e^{3x}} + c$

نکته: اگر انتگرال ضرب اعضای روبرو هم نیاز به جزء جزء نداشته باشد توقف مانعی ندارد و باید حتماً توقف کرد

مثال:

$\int e^x \cos dx = I$

انتگرال	مشتق
$\cos x$	e^x
$\sin x$	e^x
$-\cos x$	e^x

$I = e^x \sin x + e^x \cos x + \overbrace{\int -e^x \cos dx}^{-I}$

$I + I = 2I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$

نکته: هرگاه ضرب اعضا، ضریبی از جمله اصلی باشد حتماً باید توقف کرد

۱۸/۲۶۳ دستور کاهشی یا رابطه بازگشتی

$$\int \cos^n x\,dx = I_n$$

۳) $\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\underbrace{\int\cos^{n-2}x\,dx}_{I_{n-2}}$

$$I_n=\int\cos^{n-1}x\cos x\,dx$$

$$=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\underbrace{\cos^{n-2}x\overset{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}}_{\cos^{n-2}x-\cos^n x}\,dx$$

$$=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\underbrace{\int\cos^{n-2}x\,dx}_{I_{n-2}}-(n-1)\underbrace{\int\cos^n dx}_{I_n}$$

$nI_n=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)I_{n-2}\longrightarrow$ ۳ $\longrightarrow$ گزینه ۳

۵) روش تجزیه به کسرهای جزئی

برای محاسبه انتگرال $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ که p و q دو چند جمله‌ای و درجه صورت از مخرج کمتر باشد از روش تجزیه به کسر استفاده می‌کنیم.

ابتدا باید $q(x)$ را به صورت ضرب دو نوع عامل بنویسیم

۱) $(x-a)^n$

۲) $(ax^2+bx+c)^m$ که ریشه حقیقی ندارد

حالت اول: اگر $(x-a)^n$ در مخرج موجود باشد متناظر آن n کسر جزئی می‌نویسیم

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_n}{(x-a)^n}\qquad A_n=\lim_{x\to a}(x-a)^n f(x)$$

حالت دوم: در مخرج $(ax^2+bx+c)^m$ که $\Delta<0$ دیده شود متناظر آن

m کسر جزئی زیر را می‌نویسیم

$$\frac{B_1x+C}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots+\frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

۹/۲۵۶

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$C = \lim (x-1) f(x) = 1$$

$$B = \lim_{x \to 0} x^2 f(x) = -1$$

نکته: دوطرف را در x ضرب کرده و $x \to \infty$

$$\frac{1}{x(x-1)} = A + \frac{B}{x} + \frac{Cx}{x-1} \xrightarrow{x \to \infty} 0 = A + 0 + C \to A = -1$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + 1/x + \ln|x-1| +$$

مثال:
$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

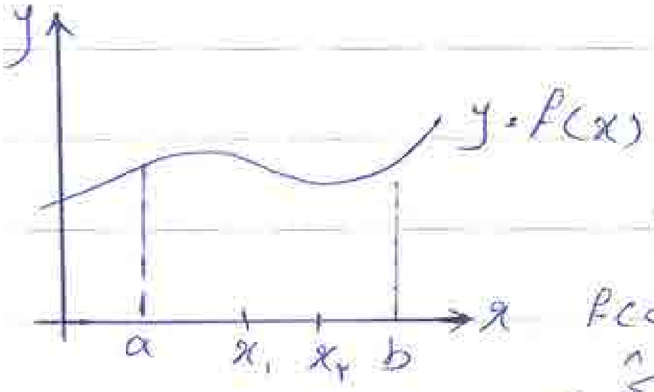
$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$A = \lim_{x \to 1} (x-1) f(x) = 1 \qquad \xrightarrow[x \to \infty]{\text{دوطرف} \times x} 0 = A + B \qquad B = -1$$

$$x = 0 \qquad -1 = -1 + C \qquad C = 0$$

$$\text{انتگرال} = \int \frac{1}{x-1} + \frac{-x}{x^2+1} = \ln|x-1| - 1/2 \ln(x^2+1) + k$$

انتگرال معین



$x_k = a + k\Delta x \quad c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x$

$= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \qquad b>a$$

ویژگیهای انتگرال معین:

۱- اگر $f(x) \geq g(x)$ برای هر $x \in [a,b]$ آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

۲- اگر برای $x \in [a,b]$ داشته باشیم $m \leq f(x) \leq M$ آنگاه:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

تعریف: میانگین یا مقدار متوسط $f(x)$ روی $[a,b]$ عبارت است از

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

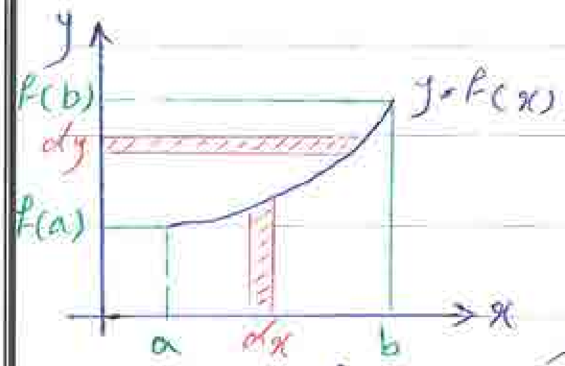
قضیه: اگر تابع $f(x)$ پیوسته باشد آنگاه $a<c<b$ موجود است

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$ قضیه مقدار میانگین در انتگرال

۳- $\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{زوج}} = 2\int_0^a f(x)\,dx \qquad \int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{فرد}} = 0$

۴- $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

۵- اگر $f(x)$ یکنوا اکید باشد



$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx=bf(b)-af(a)$$

کاربرد این مسئله محاسبه انتگرال معین توابع معکوس می‌باشد

۲۳/۲۶۷ ویژگی شماره ۲

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$$

max و min و $f(x)$ داخل انتگرال را بیابید (در این گونه سوال ها لازم نیست انتگرال بگیر

باید برای تابع تحت انتگرال $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$ روی [۰و۱] اکسترمم حساب کنیم

$$\rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}=(2+x-x^2)^{-1/2}$$

$$f'(x)=-1/2(1-2x)\times(2+x-x^2)^{-3/2}$$

$$f'(x)=0=-1/2\frac{1-2x}{(2+x-x^2)^{3/2}}$$

x	$f(x)$	
$1/2$	$2/3$	min مطلق
0	$\sqrt{2}/2$	max مطلق
1	$\sqrt{2}/2$	

$$2/3\leq f(x)\leq\sqrt{2}/2 \qquad 2/3\times(1-0)\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\sqrt{2}/2\,(1-0)$$

۲۴/۲۶۸

$$\int_{-1/2}^{1/2}\cos x\,Ln\frac{1+x}{1-x}dx=+\cos(-x)\,Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=$$

$$=-\cos x\,Ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$$ تابع فرد و بازه متقارن ← انتگرال = صفر ۰ =

قضیه: قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱) $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

۲) $$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt=u'(x)f(u(x))-v'(x)f(v(x))$$

۲۰: $\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t,x)\,dt = u'(x)\,f(u(x),x)$

$-v'(x)\,f(v(x),x) + \underbrace{\int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,dt}_{\text{مشتق را داخل انتگرال می بریم}}$

$\frac{۲۶}{۱۰۹\ ج۲}$ بیشترین مقدار $f(x)=\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$ در نقطه ای کدام x رخ می دهد

$f'(x)=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}=0 \qquad e^{-4x^2}(2-e^{3x^2})=0$

$e^{3x^2}=2 \xrightarrow{Ln} 3x^2=Ln2 \qquad x=\pm\sqrt{1/3\,Ln2}$

x	$-\sqrt{\frac{Ln2}{3}}$		0		$+\sqrt{\frac{Ln2}{3}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

پس $x=\sqrt{\frac{Ln2}{3}}$ نقطه ماکزیمم است

$\frac{۱۷}{۲۱۲\ ج۲}$ از معادله $u=\int_2^{v}\frac{ds}{1+2s^2}$ حاصل $\frac{d^2v}{du^2}$ در $v=2$ چقدر است

v تابع و u مستقل معادله $\xrightarrow{d/du} 1=\frac{v'}{\sqrt{1+2v^2}} \to v'=\sqrt{1+2v^2}$

$v''=\frac{4vv'}{2\sqrt{1+2v^2}}=3v$ مشتق $v''=2v' \to 2v'' = 2\sqrt{1+2v^2} \xrightarrow{v=2} v''=2\sqrt{19}$

$\frac{۳۰}{۲۷۰}$ $F(t)=\int_0^t \frac{\sin(tx)}{x}\,dx \qquad \frac{dF}{dt}=?$

$\frac{dF}{dt}=1\times\frac{\sin(t^2)}{t}-0+\int_0^t \frac{x\cos tx}{x}\,dx=\frac{\sin t^2}{t}+\frac{\sin tx}{t}\Big]_0^t$

$=\frac{2\sin t^2}{t}$

$\frac{۳۱}{۲۷۰}$ $f(x)=\int_0^x (1+t^3)^{-1/2}\,dt$ و g تابع معکوس f است کدام گزینه صحیح است

۱) $g''(x)=g^2(x)$ ۲) $g''(x)=1/2\,g^2(x)$

✓۳) $g''(x)=3/2\,g^2(x)$ ۴) $g''(x)=2/3\,g^2(x)$

$g''(y)=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}=\frac{1/2(3x^2)(1+x^3)^{-3/2}}{((1+x^3)^{-1/2})^3} \to g''(y)=3/2\,x^2$

$y=f(x) \to x=f^{-1}(y)=g(y) \to g''(y)=3/2\,g^2(y)$

نکته: اگر g تابع معکوس $f(x)$ باشد $y=f(x)$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)} \to g'(y)=\frac{1}{f'(x)} \xrightarrow{} d/dx \to f'(x)g''(y)=\frac{-f''(x)}{f'^2(x)}$$

$$\to g''(y)=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$$

تابع ثابت صفر نباشد

۶۴ / ۲ ج ۲۱ تابع پیوسته و ناصفر $f(x)$ در رابطه زیر صدق می کند

$$f^2(x)=\int_0^x \left(f(t)\frac{\sin t}{3-\cos t}\right)dt$$ معادله انتگرال

ضابطه $f(x)$ را بیابید

برای حذف انتگرال باید از رابطه داده شده $\frac{d}{dx}$ بگیریم

$$2f(x)f'(x)=f(x)\frac{\sin x}{3-\cos x} \to f'(x)=\frac{1/2\sin x}{3-\cos x}$$

$$\xrightarrow{\int} f(x)=1/2\,Ln(2-\cos x)+k \quad *$$

برای تعیین k باید در دو طرف معادله انتگرال به جای x عدد صفر قرار دهیم که ازش بالا و پائین مساوی گردد

$$x=0 \xrightarrow{\text{معادله انتگرال}} f^2(0)=\int_0^0 \cdots \to f(0)=0$$

$$x=0 \xrightarrow{(*)} f(0)=1/2\,ln(3-1)+k \to k=-1/2\,Ln2$$

$$f(x)=1/2\,Ln(2-\cos x)-1/2\,Ln2 \qquad \sqrt{x^2}=|x|$$

۳۴ / ۲ ج ۶۵۸

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2} tg\sqrt{t}\,dt}{x^3} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to0}\frac{2x\,tg\sqrt{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{x^2}}{3x}$$

$$x\to0 \quad \begin{cases}\frac{2x}{3x}=2/3 & x\to0^+\\ \frac{-2x}{3x}=-2/3 & x\to0^-\end{cases}$$

چون حد چپ و راست نابرابرند پس حد وجود ندارد

محاسبه انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x(Ln^2 x + Ln x + 1)} \xrightarrow[dt = \frac{dx}{x}]{t = Ln x} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(t+1/2)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$ ۴۱ / ۲۷۶

$$= \frac{1}{\sqrt{3}/2} tg^{-1} \frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\pi/3 - \pi/6) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-e^{-\sqrt{x}})} \xrightarrow[t \geq 0]{x = t^2} \int_1^2 \frac{2t\,dt}{t(1-e^{-t})} = 2\int_1^2 \frac{e^t dt}{e^t - 1}$$ ۱۲۰ / ۲۴۷۹

$$= 2(Ln(e^2-1) - Ln(e-1)) = 2Ln\frac{e^2-1}{e-1} = Ln(e+1)$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx \qquad x = sec t$$ ۵۱ / ۲۷۹

$$\begin{cases} -2 = x = sec t \rightarrow Cos t = -1/2 \rightarrow t = \frac{2\pi}{3} \\ -1 = x = sec t \rightarrow Cos t = -1 \rightarrow t = \pi \end{cases}$$

انتگرال $$\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\sqrt{sec^2 t - 1}}{sec t} sec t\, tg t\, dt = \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\sqrt{tg^2 t}}{sec t} sec t\, tg t\, dt$$

$$= \int_{2\pi/3}^{\pi} tg^2 t\, dt = \int_{2\pi/3}^{\pi} sec^2 t - 1 = (tg t - t)\Big|_{2\pi/3}^{\pi}$$

$$= -(0 - \pi) - (-\sqrt{3} - 2\pi/3)) = \pi/3 - \sqrt{3}$$

۶ / ۲ج ۷۴۷

$\int_1^{\sqrt{4}}\overset{dv}{(1-x^2)}\underbrace{\ln x}_{u}\,dx$ $du=\frac{1}{x}dx$, $v=x-\frac{x^3}{3}$

انتگرال $=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\ln x\Big|_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{x^2}{3}\right)dx=-\left(x-\frac{x^3}{9}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}$

$=-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{8}{9}$

مثال

$\int_0^1 tg^{-1}x\,dx$

روش اول $\begin{cases}u=tg^{-1}x\\ dv=dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{1+x^2}dx\\ v=x\end{cases}$

انتگرال $=x\,tg^{-1}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

روش دوم $\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-1}(x)dx=bf(b)-af(a)$

$f(x)=tg^{-1}x$, $a=0$, $b=1\rightarrow f^{-1}(x)=tg\,x$

$\int_0^1 tg^{-1}x\,dx+\int_0^{\pi/4}tg\,x\,dx=\frac{\pi}{4}-0$ $\ln(\sec x)\Big|_0^{\pi/4}=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$

$\rightarrow\int_0^1 tg^{-1}x\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

۳۰ / ۲ج ۱۹۲

اگر $I_n=\int_0^a(a^2-x^2)^n dx$ رابطه I_n و I_{n-1} را بیابید

$du=-2nx(a^2-x^2)^{n-1}$ $v=x$

$I_n=x(a^2-x^2)\Big|_0^a-2n\int_0^a-\underbrace{x^2(a^2-x^2)^{n-1}}\,dx$

$(a^2-x^2)^n-a^2(a^2-x^2)^{n-1}$

$=2n\int_0^a\underbrace{(a^2-x^2)^n dx}_{I_n}+2na^2\underbrace{\int_0^a(a^2-x^2)^{n-1}dx}_{I_{n-1}}$

$I_n=-2nI_n+2na^2I_{n-1}\rightarrow(2n+1)I_n=2na^2I_{n-1}$

نکته: برای محاسبه انتگرال معین تابع چند ضابطه ای (قدرمطلق، براکت و ...) باید انتگرال را بصورت مجموع انتگرالهایی بنویسیم که تابع بر بازه های جدید دقیقاً یک ضابطه داشته باشد پس نقاط شکستن، xهایی هستند که تابع در آنجا تغییر ضابطه می دهد

مثال: میانگین $f(x) = [x^2]$ را در $[0,2]$ بیابید

میانگین $= \dfrac{\int_0^2 f(x)dx}{2-0} = \frac{1}{2}\int_0^2 [x^2]dx$

نقاط شکستن ← xهایی که داخل براکت صحیح شود

$0 \le x \le 2 \to 0 \le x^2 \le 4 \xrightarrow{x^2 \in Z} x^2 = 0, 1, 2, 3, 4$

$x = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$

میانگین $= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_0^1 0\,dx}_{0} + \int_1^{\sqrt{2}} 1\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} 3\,dx\right) = \frac{1}{2}\left((\sqrt{2}-1) + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right.$
$\left. + 3(2-\sqrt{3})\right)$

$\frac{61}{282}$ $\int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x|\,dx$ نقاط شکستن توابع قدرمطلق: $\begin{cases} \text{ریشه} \\ \text{ناپیوستگی} \end{cases}$

$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow tg\,x = 1 \Rightarrow x = \pi/4$

انتگرال $= \int_0^{\pi/4} -\sin x + \cos x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x - \cos x\,dx$

$= \cos x + \sin x \Big]_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} - 2$

نکته: فرض کنید $a \neq 0$ و $f(x)$ پیوسته باشد

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$
$$x \to a - x$$

$\frac{۲۳}{۲۷۴}$ اگر $a \neq ۰$ مطلوبست

$$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$$

$$x \rightarrow a-x : I = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(x)}\,dx$$

جمع می‌کنیم $$۲I = I + I = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \int_0^a 1\,dx = a$$

$$٤\, I = a/۲$$

نکته: $$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = a/۲$$

مثال: $$\int_0^{\pi/۲} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x}\,dx = \frac{\pi/۲}{۲} = \pi/۴$$

$f(x) = \sin^m x$ و $a = \pi/۲$

$f(a-x) = \sin^m(\pi/۲ - x) = \cos^m x$

$\frac{۲۴}{۲۷۴}$ $$\int_0^\pi x\,f(\sin x)\,dx$$

$$x \rightarrow \pi - x : I = \int_0^\pi (\pi - x)\,f(\overset{\sin x}{\sin(\pi - x)})\,dx$$

جمع می‌کنیم $$۲I = I + I = \int_0^\pi \pi\,f(\sin x)\,dx \rightarrow I = \pi/۲ \int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

$$\int_0^\pi x\,f(\sin x)\,dx = \pi/۲ \int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

نکته: $$\int_0^\pi x\,f(\sin x)\,dx = \pi/۲ \int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

ریاضی عمومی ۱و۲ | **استاد : مسعود آقاسی** | تابستان ۹۱ آموزشگاه نصیر

$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ ۲۷ / ۲۷۸

انتگرال $= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \xrightarrow{t=\cos x} \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}^{-1}t\Big|_1^{-1}$

$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$

محاسبه حد یک مجموع با انتگرال معین

اگر مجموع داده شده برابر مجموع ریمان $f(x)$ روی $[0,1]$ باشد آنگاه جواب سؤال $\int_0^1 f(x)dx$ خواهد بود و برای یافتن $f(x)$ کافی است $\frac{1}{n}f(c_k)$ را برابر جمله عمومی مجموع قرار داده و با محاسبات جبری $f(x)$ را می‌یابیم. $\left(\frac{k-1}{n}\le c_k \le \frac{k}{n}\right)$

$\lim\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ ۶۳ / ۲۸۳

$n f(c_k) =$ جمله عمومی $= \frac{n}{n^2+k^2}$

$\frac{1}{n}f(c_k) = \frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{1+(k/n)^2} \quad k/n = c_k \to f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

جواب $= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{tg}^{-1}x\Big|_0^1 = \pi/4$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\dots+\sqrt{n^2-n^2}\right)$ ۶۴ / ۲۸۳

$\frac{1}{n}f(c_k) =$ جمله عمومی $= \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}$

$\to f(c_k) = \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n} = \sqrt{\frac{n^2-k^2}{n^2}} = \sqrt{1-(k/n)^2} \quad k/n = c_k \to f(x) = \sqrt{1-x^2}$

جواب $= \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t}\,(\cos t\,dt)$

$= \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4$

۲۸ / ۲۸۳

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} tg^{-1}\frac{2k-1}{2n}$$

$\frac{1}{n}f(c_k) =$ جمله عمومی $= \frac{1}{n}tg^{-1}\frac{2k-1}{2n} \to f(c_k) = tg^{-1}\frac{2k}{2n}$

$= tg^{-1}\frac{k-\frac{1}{2}}{n}$ $\frac{k-1}{n} < \frac{k-\frac{1}{2}}{n} < \frac{k}{n}$

$c_k \to x \to f(x) = tg^{-1}x$ جواب $= \int_0^1 tg^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}Ln2$

انتگرال ناسره (مجازی)

منظور از انتگرال ناسره آن است که:

۱) بازه انتگرال‌گیری نامحدود باشد (شامل ∞ باشد)

۲) تابع تحت انتگرال در بازه انتگرال‌گیری حدی برابر ∞ داشته باشد (تابع جایی [illegible] دارد

مثال: $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ انتگرال همگرا است

$tg^{-1}x\Big|_0^b = tg^{-1}b$

$\int_0^1\frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{1}{x^2}dx = \infty$ انتگرال واگرا است

$-\frac{1}{x}\Big|_a^1 = -1+\frac{1}{a}$

نکته: $\int_{\text{عدد مثبت}}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ همگراست $\Leftrightarrow p>1$

نکته: $\int_{x_0}^{\text{عدد}}\frac{dx}{(x-x_0)^p}$ همگراست $\Leftrightarrow p<1$

تعریف اگر تعداد ناسرگی‌ها بیشتر از یکی باشد انتگرال را به صورت جمع انتگرال‌هایی می‌نویسیم که هر یک دقیقاً یک ناسرگی داشته باشند. انتگرال را همگرا می‌نامیم اگر همه انتگرال‌ها در مجموع همگرا باشند.

مثال ۱ بررسی کنید انتگرال همگراست یا واگرا؟

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-2)^5}=\int_2^3\frac{dx}{(x-2)^5}+\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-2)^5}$$

I_1 $p=5$ واگراست

این انتگرال واگراست

مثال: بررسی کنید انتگرال زیر همگراست یا واگرا؟

$$\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^4}=\int_0^1\frac{dx}{(x-1)^4}+\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^4}$$

I_1 $p=4$ واگراست

پس این انتگرال واگراست

نتیجه $\int_a^b\frac{dx}{(x-x_0)^p}$ که $a<x_0<b$ همگراست $\Leftrightarrow p<1$

آزمون‌های همگرایی

اگر $\int_a^b f\,dx$ و $\int_a^b g\,dx$ دقیقاً یک نقطه مشترک ناسره داشته باشند آن را x_0 می‌نامیم

۱) آزمون مقایسه: فرض کنید $f(x)\geq g(x)\geq 0$

الف) اگر $\int_a^b f\,dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^b g\,dx$ نیز همگراست

ب) اگر $\int_a^b g\,dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^b f\,dx$ نیز واگراست

۲- آزمون هم ارزی:

اگر $f \sim g$ داشته باشیم آنگاه $\int_a^b f\,dx$ و $\int_a^b g\,dx$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند.

۳- آزمون قدر مطلق

اگر $\int_a^b |x|\,dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^b f\,dx$ نیز همگرا است

مثال: بررسی کنید انتگرال های زیر همگرا هستند یا واگرا؟

۱) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x^3+x^2+5}\,dx$

$x \to \infty : \dfrac{x^2+\sqrt{x}+1}{x^3+x^2+5} \sim \dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$

$\int^{+\infty} \frac{dx}{x}$ چون $p = 1 \leq 1$ یعنی واگرا است و با آزمون هم ارزی انتگرال داده شده نیز واگرا است

۲) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}}\,dx$ $\xrightarrow{\quad}$ $\sin\frac{1}{x}\ (x \to 0^+)$ علامت مشخص ندارد

$\int_0^1 \left|\frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}}\right| dx$ را بررسی می‌کنیم: $\left|\frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}}\right| = \frac{|\sin 1/x|}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$

$|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$ می‌دانیم $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ چون $p = \frac{1}{2} < 1$ پس انتگرال همگرا است

ولذا بنابر آزمون (۲) I نیز همگرا است

$\frac{۸۴}{۲۹۹}$ اگر $\beta < \alpha$ تحت چه شرایطی انتگرال زیر همگرا است

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha+x^\beta}=\int_0^{1}\frac{dx}{x^\alpha+x^\beta}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha+x^\beta}$$

$$x=0 \quad \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\sim\frac{1}{x^\beta}\overset{\text{همگرا}}{\Longleftrightarrow}\beta<1$$

$$x=+\infty \quad \frac{1}{x^\alpha+x^\beta}\sim\frac{1}{x^\alpha}\overset{\text{همگرا}}{\Longleftrightarrow}\alpha>1$$

همگرایی $\Longleftrightarrow \beta<1$ و $\alpha>1$

$\frac{۳۷}{۳ج۶۵۸}$ مقدار n را طوری بیابید که انتگرال زیر همگرا شود؟

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{n}{x+1}-\frac{3x}{2x^2+n}\right)dx$$

$$\text{تابع}=\frac{n(2x^2+n)-3x(x+1)}{(x+1)(2x^2+n)}\sim\frac{(2n-3)x^2-3x}{2x^3}$$

* اگر $2n-3\neq 0$ عبارت بالا مشابه $\frac{1}{x}$ است که طبق الگوی $p=1$ واگرا است

* اگر $2n=3$ یعنی $n=\frac{3}{2}$ عبارت بالا مشابه $\frac{1}{x^2}$ است که طبق الگوی $p=2>1$ همگرا است

پس به ازای $n=\frac{3}{2}$ همگرا می‌شود

محاسبه انتگرال ناسره

۱) اگر ناسرگی داخل بازه نباشد: مانند بقیه محاسبه می‌کنیم

۲) اگر ناسرگی داخل بازه باشد بررسی می‌کنیم همگراست یا واگرا
چنانچه همگرا باشد مانند بقیه محاسبه می‌کنیم

۶۵ / ۲۹۲

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\operatorname{ch} t}=\int_0^{+\infty}\frac{۲dt}{e^t+e^{-t}}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{۲e^t}{e^{۲t}+1}dt \overset{u=e^t}{=} \int_1^{+\infty}\frac{۲du}{u^۲+1}=۲\,tg^{-1}u\Big|_1^{+\infty}=۲\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\pi}{۲}$$

۱۲۴ / ۲ج ۸۵

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+a)(x+b)}dx \quad b>a>0$$

$$\frac{1}{(b-a)}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)dx=\frac{1}{b-a}\left(Ln(x+a)-Ln(x+b)\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{b-a}Ln\frac{x+a}{x+b}\Big|_0^{+\infty}$$

نکته:

$$\frac{1}{(x+1)(x-۳)}=\boxed{\frac{1}{-۴}}\left(\underset{\text{اولی}}{\frac{1}{x+1}}-\underset{\text{دومی}}{\frac{1}{x-۳}}\right)$$

$\times$ = اولی − دومی

$$\frac{1}{(x^۲+1)(x^۲+۴)}=\frac{1}{۳}\times\left(\underset{\text{اولی}}{\frac{1}{x^۲+1}}-\underset{\text{دومی}}{\frac{1}{(x^۲+۴)}}\right)$$

$\times$ = اولی − دومی

۲۷ / ۲ج ۱۰۹

$I=\int_۰^{+\infty} e^{-۳x}\sin ۴x\,dx = ۴/۲۵$

مشتق	انتگرال
$e^{-۳x}$	$\sin ۴x$
$-۳e^{-۳x}$	$-۱/۴\cos ۴x$
$۹e^{-۳x}$	$-۱/۱۶\sin ۴x$

$I = e^{-۳x}\left(-\frac{\cos ۴x}{۴} - \frac{۳\sin ۴x}{۱۶}\right)\Big|_۰^{+\infty} + \left(-۹/۱۶\, I\right)$

$= ۰-(-۱/۴)-۹/۱۶\, I$

$\longrightarrow ۲۵/۱۶\, I = ۱/۴ \Rightarrow I = \frac{۴}{۲۵}$

نکته:

$\int_۰^{+\infty} e^{-3x}\sin(ax)dx = \frac{a}{s^۲+a^۲}$

$(s>۰)$

$\int_۰^{+\infty} e^{-sx}\cos(ax)dx = \frac{s}{s^۲+a^۲}$

۸۰ / ۲۹۸

$\int_۰^۳ \frac{dx}{x^۲-۲x+۱} = \int_۰^۳ \frac{dx}{(x-۱)^۲}$ واگرا است

توجه کنید که نقطه $x=۱$ (داخل بازه) ناسره است وچون $p=۲>۱$ پس واگرا است

۱۶۱ / ۲ج ۳۲۹

حاصل $\int_۰^۱ \frac{x-۱}{\ln x}dx$ را بیابید

(راهنمایی: قرار دهید $I(\lambda)=\int_۰^۱ \frac{x^\lambda-۱}{\ln x}dx$ و سپس نسبت به λ مشتق بگیرید.)

$\frac{dI}{d\lambda} = \int_۰^۱ \frac{x^\lambda \cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}}dx = \int_۰^۱ x^\lambda dx = \frac{۱}{\lambda+۱}x^{\lambda+۱}\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{\lambda+۱}$

$\rightarrow dI/d\lambda = \frac{۱}{\lambda+۱} \xrightarrow{\int d\lambda} I=I(\lambda)=\ln(\lambda+۱)+c \quad *$

$\lambda=۰ \longrightarrow I(۰)=\int_۰^۱ \frac{x^۰-۱}{\ln x}dx=۰ \quad \xrightarrow[\lambda=۰]{*} I(۰)=\ln ۱+$

$\rightarrow I(x)=\int_۰^۱ \frac{x^\lambda-۱}{\ln x}dx=\ln(\lambda+۱) \rightarrow \lambda=۱ \rightarrow \int_۰^۱ \frac{x-۱}{\ln x}dx=\ln ۲$

تابع گاما: شرط همگرایی $p > -1$ و $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^p \, dt$

مثال $p = 0 \longrightarrow \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty}$ $\quad \Gamma(1) = 1$

ویژگیه تابع گاما:

۱) $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ رابطه بازگشتی

۲) $\Gamma(n+1) = n!$ و $n = 0, 1, 2, 3$ و ...

۳) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

۴) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2p+1} \, dx = 1/2 \, \Gamma(p+1) \leftarrow t = x^2$ و $x \geq 0$

۵) $\int_0^1 (-\ln x)^p \, dx = \Gamma(p+1) \leftarrow t = -\ln x$

$$e^{-t} t^p \, dt = e^{\ln x} (-\ln x)^p \left(-dx/x\right)$$

$$\begin{cases} 0 = t = -\ln x \longrightarrow x = 1 \\ +\infty = t = -\ln x \rightarrow \ln x = -\infty \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

۶) $\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

شرط همگرایی : $x > 0 , y > 0$

۷) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \, \cos^{2y-1}\theta = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{2\,\Gamma(x+y)}$

۳۵ / ۲ج۲۰۲

$\int_{۰}^{+\infty} x^{۵} e^{-x} dx = ۵! = ۱۲۰$

$(P=۵)$ تعریف گاما $\Gamma(۶) \rightarrow (P!)$

مثال:

$\int_{۰}^{+\infty} e^{-x^{۲}} dx \overset{(۴)}{=} \frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$

$(۴): ۲P+۱=۰ \longrightarrow P=-\frac{۱}{۲}$

۷۵ / ۲ج۵۵۸

$\int_{۰}^{۱} (\overset{-\ln x}{\ln \frac{۱}{x}})^{۵} dx = \int_{۰}^{۱} (-\ln x)^{۵} dx$

$\xrightarrow[P=۵]{(۵)} \Gamma(۶) = ۵! = ۱۲۰$

۹۱ / ۳۰٤

$\int_{۰}^{+\infty} \sqrt{y}\, e^{-y^{۳}} dy \overset{t=y^{۳}}{=} \int_{۰}^{+\infty} t^{۱/۶} e^{-t} (\frac{۱}{۳} t^{۲/۳}) dt$

$= \frac{۱}{۳}\int_{۰}^{+\infty} e^{-t} t^{-۱/۲} dt = \frac{۱}{۳}\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \frac{\sqrt{\pi}}{۳}$

$P=\frac{۱}{۲} \leftarrow \Gamma$ تعریف

۹۲ / ۳۰٤

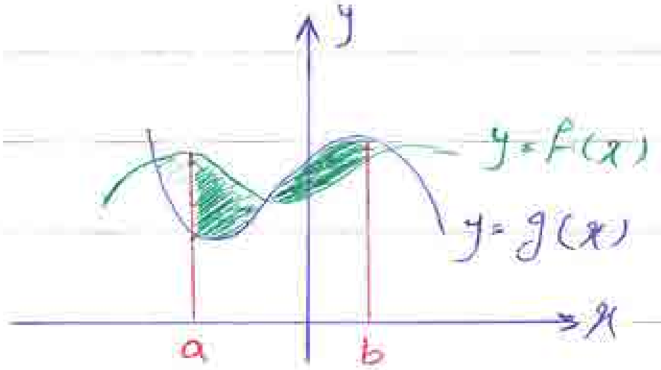
$\int_{۰}^{\pi/۲} \cos^{۲}\theta\, d\theta \overset{(۷)}{=} \frac{\Gamma(\frac{۱}{۲})\Gamma(\frac{۷}{۲})}{۲\Gamma(۴)} = \frac{\sqrt{\pi}\times\frac{۱۵}{۸}\sqrt{\pi}}{۳!=۶} = \frac{۵}{۲۴}\pi$

$\begin{cases} ۲x-۱=۰ \longrightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ ۲y-۱=۶ \longrightarrow y=\frac{۷}{۲} \end{cases}$

$\Gamma(\frac{۷}{۲}) = \frac{۵}{۲}\cdot\frac{۳}{۲}\Gamma(\frac{۳}{۲}) = \frac{۵}{۲}\cdot\frac{۳}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱۵}{۸}\sqrt{\pi}$

کاربردهای انتگرال معین

۱- مساحت



$$\text{مساحت} = \int_a^b \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\text{ارتفاع}}\,dx$$

$\frac{۷}{۴۴۱ \text{ ج } ۲}$ مساحت ناحیه محدود به محور y و خط $y = x$ و نمودار $y = \frac{۲}{۱+x^۲}$ را بیابید.

$$\text{تلاقی}: \frac{۲}{۱+x^۲} = x \longrightarrow x^۳ + x = ۲ \longrightarrow x = ۱$$

$$\text{مساحت} = \int_۰^۱ \left|\frac{۲}{۱+x^۲} - x\right| dx = \int_۰^۱ \left(\frac{۲}{۱+x^۲} - x\right) dx$$

$$= ۲\,tg^{-۱}x - x^۲\Big|_۰^۱ = \pi/۲ - ۱/۲$$

$\frac{۹}{۳۲۱ \text{ ج } ۲}$ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای زیر را بیابید؟

$$y^۳ - ۳y^۲ - x + ۲y = ۰$$
$$y^۲ + x - ۲y = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} \quad y^۳ - ۲y^۲ = ۰ \Rightarrow y^۲(y - ۲) = ۰ \Rightarrow y = ۰ \text{ و } ۲$$

$$\left.\begin{array}{l} x_۲ = y^۳ - ۳y^۲ + ۲y \\ x_۱ = ۲y - y^۲ \end{array}\right\} \quad \text{مساحت} = \int |x_۲ - x_۱|\,dy = \int_۰^۲ |y^۳ - ۲y^۲|\,dy$$

$$= \int_۰^۲ (۲y^۲ - y^۳)\,dy = ۲/۳\,y^۳ - ۱/۴\,y^۴ \Big|_۰^۲$$

۹۶/۳۰۶ سطح محصور به وسیله $y^2=4x^2-x^4$ را بیابید

چون با تبدیل y به -y ضابطه عوض نمی‌شود نمودار نسبت به محور x متقارن است. چون با تبدیل x به -x ضابطه عوض نمی‌شود پس نمودار نسبت به محور y متقارن است پس کافی است $y\geq 0$ و $x\geq 0$ و جواب را در ۴ ضرب نمائیم. در واقع مساحت ناحیه محدود به نمودار در ربع اول (بین محور x و y) را محاسبه و پاسخ در ۴ ضرب می‌شود

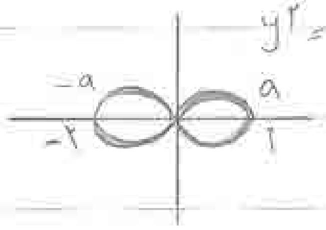
$$y=\sqrt{4x^2-x^4}=x\sqrt{4-x^2} \qquad y=0 \text{ تقاطع با } \longrightarrow x=0,2$$

$$\text{مساحت}: \int_0^2 |y|\,dx=4\int_0^2 |x\sqrt{4-x^2}|\,dx$$

$$4\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx \xrightarrow{t=4-x^2} 4\int_4^0 -\frac{1}{2}\,t^{1/2}\,dt=-2\times\frac{2}{3}\,t^{3/2}\Big|_4^0$$

$$\text{مساحت}=\frac{32}{3}$$

$$y^2=a^2x^2-x^4,\ a>0$$

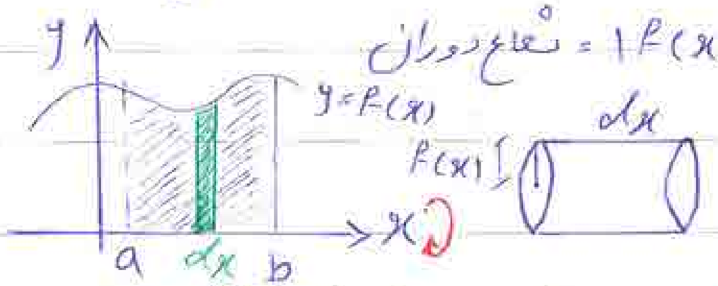


۲- حجم : حجم حاصل از دوران

الف : دوران حول محور xها :

$$\text{حجم}=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

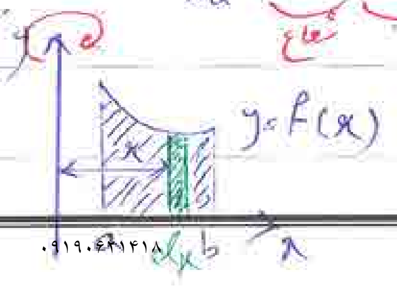
(روش دیسک) $\text{شعاع دوران}=|f(x)|$



ب : دوران حول محور yها :

$$\text{حجم}=2\pi\int_a^b \underbrace{|x|}_{\text{شعاع}}\,\underbrace{|f(x)|}_{\text{ارتفاع}}\,dx$$

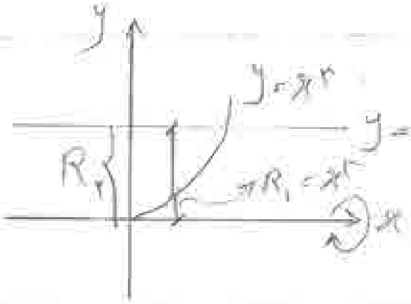
روش پوسته استوانه‌ای



۵/۲ج۶۵۴ : حجم محدود بین $y=x^3$ و $y=1$ و خطوط $x=0$ و $x=1$ را حول محور x دوران می دهیم حجم آن را بیابید

$(\text{حجم دیسک}) = \pi\int (R_2^2 - R_1^2)\,dx = \pi\int_0^1 (1^2-(x^3)^2)\,dx$

$= \pi\left(x - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{6\pi}{7}$



مثال: حجم محدود بین $y=x^2$ و $y=x$ را حول محورهای زیر دوران می دهیم حجم حاصل را بیابید

الف) حول محور y ها

ب) حول خط $x=-2$

ج) حول خط $y=-1$

نقاط تقاطع: $x^2=x \longrightarrow x=0,1$

الف: $\text{حجم} = 2\pi\int \text{شعاع}\times\text{ارتفاع}\,dx = 2\pi\int_0^1 x(x-x^2)\,dx$

$= 2\pi\int_0^1 x(x-x^2)\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$

ب: هرگاه دوران حول خط $x=\alpha$ باشد شعاع دوران $|x-\alpha|$ خواهد بود

$\text{حجم} = 2\pi\int_0^1 \underbrace{(x+2)}_{\text{شعاع}}\underbrace{(x-x^2)}_{\text{ارتفاع}}\,dx$

ج: هرگاه دوران حول خط $y=\beta$ باشد در روش دیسک شعاع دوران $|y-\beta|=R$

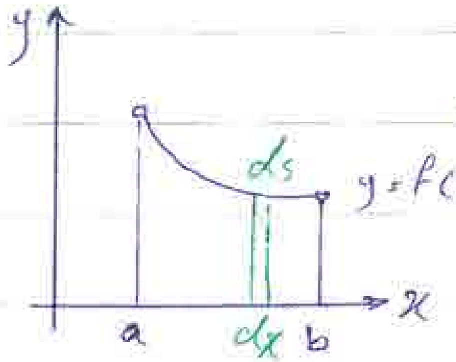
$\text{حجم دیسک} = \pi\int_0^1 (R_2^2 - R_1^2)\,dx = \pi\int_0^1 (x+1)^2-(x^2+1)^2\,dx$

$R_2 = |y-\beta| = (x+1)$

$R_1 = |y-\beta| = (x^2+1)$

۳- طول قوس

طول قوس قسمتی از نمودار $y=f(x)$ و $a \leq x \leq b$ است برابر است با

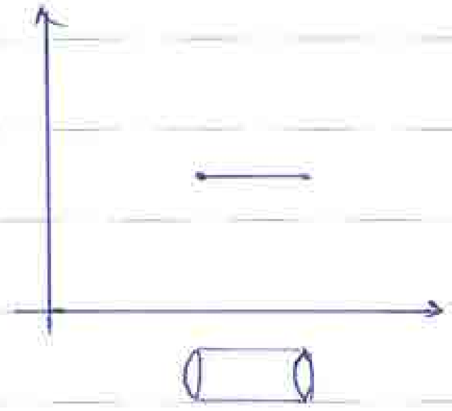


$ds = \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ المان طول قوس

طول قوس $= \int_{x=a}^{x=b} ds$

۴- مساحت جانبی سطح حاصل از دوران

اگر نمودار $y=f(x)$ و $a \leq x \leq b$ حول محوری دوران کند، مساحت جانبی حاصل از دوران برابر است با



الف: حول محور xها: $2\pi \int_{x=a}^{x=b} \underset{\text{شعاع}}{|y|}\, \overset{\text{ارتفاع}}{ds}$ = مساحت جانبی

ب: حول محور yها: $2\pi \int_{x=a}^{x=b} \underset{\text{شعاع}}{|x|}\, ds$ = مساحت جانبی

$\frac{۱۰۹}{۳۱۶}$ مساحت جانبی حاصل از دوران $y=x^۲$ و $\sqrt{۲}\geq x\geq ۰$، حول محور y را بیابید

$y'=۲x \qquad ds=\sqrt{۱+y'^۲}\,dx=\sqrt{۱+۴x^۲}\,dx$

مساحت جانبی $=۲\pi\int \overset{\text{شعاع}}{|x|}\,ds=۲\pi\int_۰^{\sqrt{۲}} x\sqrt{۱+۴x^۲}\,dx$

$\xrightarrow[du=۸xdx]{u=۱+۴x^۲} \frac{\pi}{۴}\int_۱^۹ u^{۱/۲}du=\frac{\pi}{۶}u^{۳/۲}\Big|_۰^۹=\frac{۱۳\pi}{۳}$

$\frac{۱۱۰}{۳۱۶}$ مساحت سطح حاصل از دوران $\begin{cases} y^۲+۴x=۲\ln y \\ ۱\leq y\leq ۳\end{cases}$ حول محور xها را بیابید

$x=\frac{۱}{۲}\ln y-\frac{y^۲}{۴}\longrightarrow x'=\frac{dx}{dy}=\frac{۱}{۲y}-\frac{۱}{۲}y$

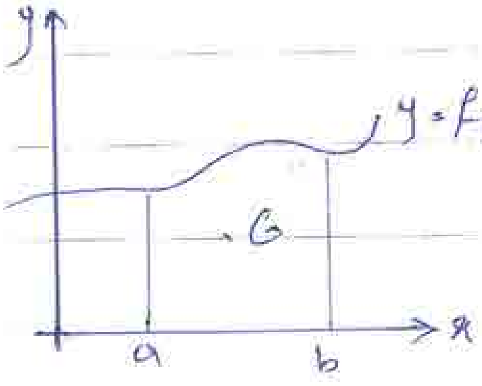
$ds=\sqrt{۱+x'^۲}\,dy=\sqrt{۱+(\frac{۱}{۲y}-\frac{۱}{۲}y)^۲}\,dy=\sqrt{(\frac{۱}{۲y}+\frac{۱}{۲}y)^۲}\,dy$

$\longrightarrow ds=(\frac{۱}{۲y}+\frac{۱}{۲}y)dy \longrightarrow$ مساحت جانبی $=۲\pi\int|y|\,ds=۲\pi\int_۱^۳ y(\frac{۱}{۲y}+\frac{۱}{۲}y)\,dy$

$=\pi\int_۱^۳(۱+y^۲)\,dy=\pi(y+\frac{y^۳}{۳})\Big|_۱^۳=\frac{۳۲\pi}{۳}$

نکته: $(a-b)^۲+۴ab=(a+b)^۲$

۵- مرکز هندسی



$G(\bar{x},\bar{y})$.

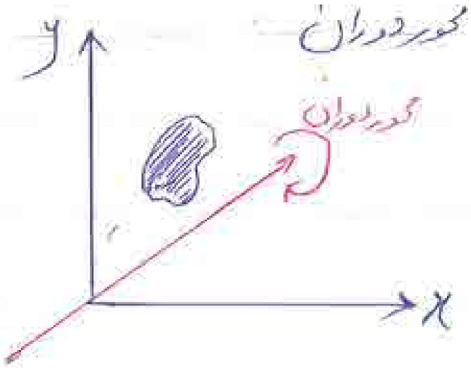
$$\bar{x}=\frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\bar{y}=\frac{\frac{۱}{۲}\int_a^b f^۲(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

۶- قضایای پاپوس

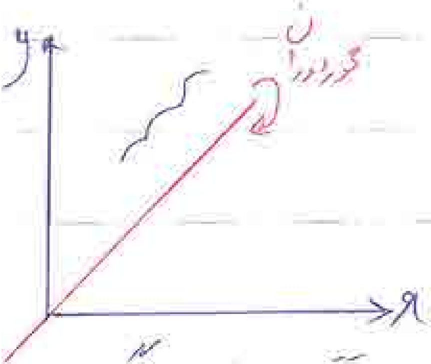
قضیه اول: اگر ناحیه‌ای در صفحه، حول یک محور دوران کند، حجم جسم حاصل برابر است با:

$$\text{حجم} = (\text{مساحت ناحیه}) \times 2\pi \underbrace{d}_{\text{فاصله مرکز هندسی ناحیه تا محور دوران}}$$



قضیه دوم: اگر نمودار حول یک محور در صفحه دوران کند مساحت جانبی سطح حاصل برابر است با:

$$\text{مساحت جانبی} = (\text{طول قوس})(2\pi \underbrace{d}_{\text{فاصله مرکز هندسی نمودار تا محور دوران}})$$

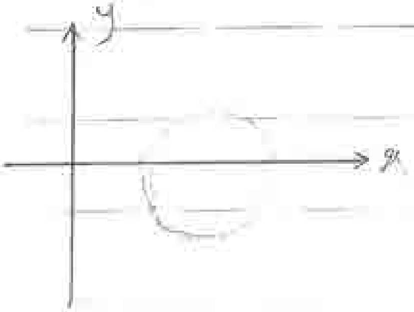


نکته: اگر شکلی دارای محور تقارن باشد، مرکز هندسی روی محور تقارن قرار می‌گیرد

نکته: فاصله (x_0, y_0) از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$\text{فاصله} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\frac{۱۱۴}{۳۲۰}$ اگر ناحیه داخل دایره $(x-b)^۲+y^۲=a^۲$ که $۰<a<b$ حول محور y دوران کند مطلوبست حجم جسم؟



$d=|b|=b$　　$G(b,۰)$ مرکز هندسی

قضیه اول ← حجم = (مساحت) $(۲\pi d)=\pi a^۲(۲\pi d)$

$=۲\pi^۲a^۲b$

$\frac{۱۱۵}{۳۲۱}$ اگر دایره $(x-b)^۲+y^۲=a^۲$ که $۰<a<b$ حول محور y دوران کند مطلوبست مساحت سطح حاصل؟

قضیه دوم ← مساحت جانبی = (طول قوس) $(۲\pi d)=(۲\pi a)(۲\pi b)=۴\pi^۲ab$

مثال: ناحیه مثلثی شکل به رئوس $(۰,۰)$ و $(۲,۰)$ و $(۱,۱)$ حول خط $x+y=۵$ دوران می‌کند مطلوبست حجم جسم

مرکز هندسی مثلث = میانگین رئوس　$G\left(\frac{۰+۲+۱}{۳},\frac{۰+۰+۱}{۳}\right)$　　$x+y-۵=۰$

$\to G(۱,۱/۳)$

$d=\frac{|۱+۱/۳-۵|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۱۱}{۳\sqrt{۲}}$　　　مساحت $=\frac{۱\times۲}{۲}=۱$

حجم = (مساحت) $(۲\pi d)=\frac{۲۲\pi}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱۱\pi}{۳}\sqrt{۲}$

$\frac{۵۷}{۳۱۹}$، مرکز هندسی ناحیه داخل دایره $x^۲+y^۲=a^۲$ $(a>۰)$ و بالای محور x

یعنی $y\geq۰$ و $x^۲+y^۲\leq a^۲$ را بیابید

ناحیه نسبت به محور y متقارن است پس G روی محور y قرار دارد و لذا $\bar{x}=۰$ برای

محاسبه $\bar{y}$ دو روش داریم:

روش اول (با فرمول):

$$\bar{y} = \frac{1/2\int_{-a}^{a} y^2 dx}{\int_{-a}^{a} y\,dx} = \frac{1/2\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx}{1/2\,\pi a^2}$$

$$= \frac{\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx}{\pi/2\,a^2} = \frac{(ax-x^3/3)|_0^a}{\pi/2\,a^2} = \frac{4a}{3\pi}$$

روش دوم: فاصله مرکز هندسی تا محور x برابر $\bar{y}$ است. ضمناً در اثر دوران داخل نیم دایره حول قطر (محور xها) یک کره بدست می آید که حجم آن $\frac{4\pi}{3}a^3$ می باشد

از قضیه اول

حجم = مساحت $\times 2\pi d$

$$4\pi/3\,a^3 = \frac{\pi a^2}{2}\times 2\pi\bar{y} \rightarrow \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$$

۷- منحنی های پارامتری

منحنی پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ و $a < t < b$ مفروض است

کلیه فرمولهای اشاره شده در کاربردهای انتگرال برای منحنی پارامتری قابل استفاده است اما بجای dx قرار می دهیم $|dx| = |x'|dt$ و حدود t روی کران انتگرالها مطرح می شود

المان طول قوس

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,|dx| = \sqrt{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}\,|x'|\,dt$$
$$= \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودار $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=t^3+t \end{cases}$ و $0 \le t \le 1$ ، با محور x را بیابید.

$$\text{مساحت} = \int |y|\,|dx| = \int_0^1 (t^3+t)(2t+2)\,dt$$

$$= \int_0^1 (2t^4+2t^3+2t^2+2t)\,dt = ?$$

$$dx = x'\,dt = (2t+2)\,dt$$

۳۶
۲ج ۵۵۲

: طول قوس نمودار $x=e^t-t$ و $4e^{\frac{1}{2}t}$ در $0 \le t \le 2$ ، را بیابید.

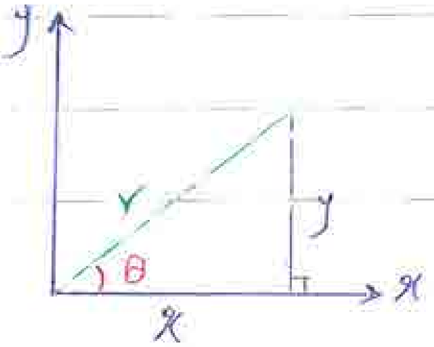
$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \sqrt{(e^t-1)^2+4e^t} = \sqrt{(e^t+1)^2}\,dt$$

$$= (e^t+1)\,dt$$

$$\text{طول قوس} = \int ds = \int_0^2 (e^t+1)\,dt = (e^t+t)\Big|_0^2 = e^2+1$$

فصل پنجم

مختصات قطبی



$P(x,y) \longleftrightarrow (r,\theta)$

محور xها = محور قطبی ، مبدأ مختصات = قطب

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

مفهوم منفی بودن r :

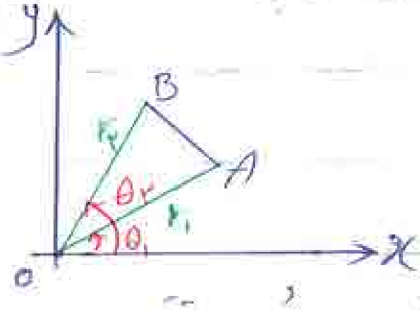
فرض کنید $r>0$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (-r)\cos(\theta+\pi) \\ y = r\sin\theta = (-r)\sin(\theta+\pi) \end{cases}$$

پس نقطه (r,θ) منطبق $(-r,\theta+\pi)$ است یا کافی است نقطه $(-r,\theta)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم

فاصله دو نقطه در مختصات قطبی

نقاط $A(r_1,\theta_1)$ و (r_2,θ_2) دارای فاصله زیر خواهند بود



$$|AB| = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

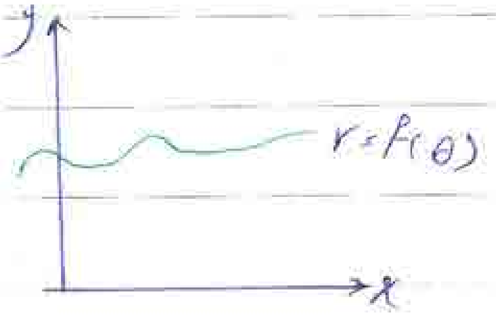
$\frac{۳۳}{۲۶.۷۵}$ در مختصات قطبی $(۶, \frac{۱۷\pi}{۱۲})$ و $(\sqrt{۸}, \frac{۱۳\pi}{۶})$ دو رأس متقابل یک مربع هستند. مساحت مربع چقدر است

$$طول\ قطر = |AB| = \sqrt{\sqrt{۸}^۲+۶^۲-۲\sqrt{۸}\times۶\cos\frac{۱۵\pi}{۱۲}} = \sqrt{۸+۳۶+۲۴\sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۴}}$$

$$= \sqrt{۶۸} = d \quad — \quad مساحت\ مربع = \frac{۱}{۲}d^۲ = \frac{(\sqrt{۶۸})^۲}{۲} = ۳۴$$

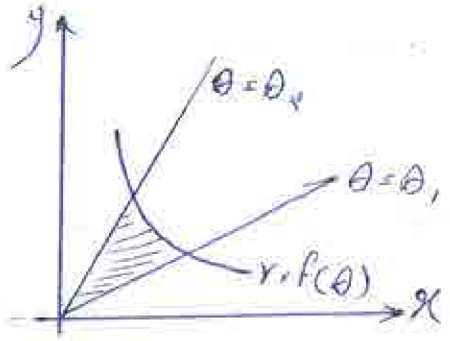
نمودار قطبی به عنوان منحنی پارامتری

معادله $r=f(\theta)$ مفروض است

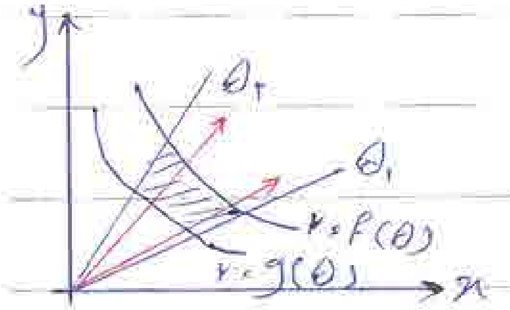


$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

مساحت



$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

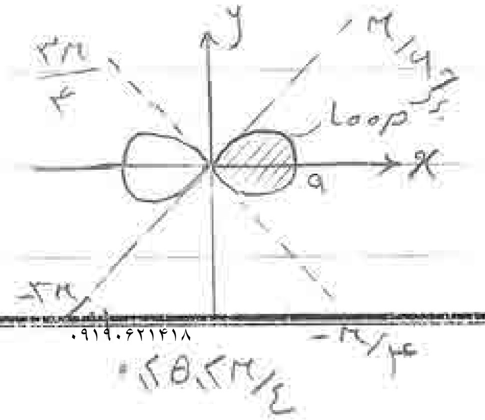


$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (\overset{\text{خروج}}{f^2(\theta)}-\underset{\text{ورود}}{g^2(\theta)})d\theta$$

تذکر: شرط استفاده از فرمول اشاره شده آن است که هر خط شعاعی $\theta=\theta_0$ در ناحیه رسم کنیم دقیقاً از یکی از دو نمودار وارد و از دیگری خارج گردد

$\frac{۱۳}{۴۲۷}$ مساحت ناحیه محدود به $r^2=a^2\cos 2\theta$ را بیابید $(a>0)$

$$r=0 \rightarrow \cos 2\theta=0 \rightarrow \theta=\pm\pi/4 \text{ و } \pm 3\pi/4$$



$0 \le \theta \le \pi/4$

$$\text{مساحت} = 2\times\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\theta\, d\theta}_{\text{مساحت برگ سمت راست}} = a^2$$

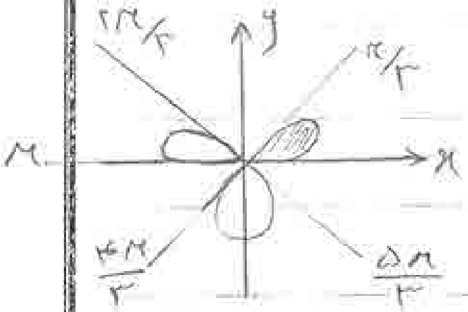
نکته: اگر در نمودار قطبی $r=f(\theta)$ داشته باشیم $f(\theta_0)=0$ و $f'(\theta_0)\neq 0$ آنگاه $\theta=\theta_0$ معادله خط مماس در مبدأ است

نکته: اگر در نمودار قطبی با تبدیل $\theta \to -\theta$ ضابطه عوض نشود آنگاه محور x محور تقارن خواهد بود

نکته: اگر در نمودار قطبی با تبدیل $r \to -r$ ضابطه عوض نشود آنگاه مبدأ مختصات مرکز تقارن خواهد بود

$\frac{۶}{۴۲۴}$ مساحت ناحیه محدود $r=a\sin ۳\theta$ را بیابید $(a>0)$

$r=0 \to \theta=0, \pi/3, 2\pi/3$: ۳ برگ متقارن



$$\text{مساحت} = ۳\times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} a^2\sin^2 3\theta\, d\theta$$

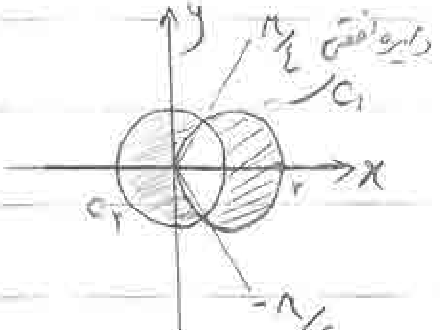
$$= \frac{3a^2}{4}\int_0^{\pi/3}(1-\cos 6\theta)\,d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

$\frac{۷}{۴۲۴}$ $C_1: r=2\cos\theta$ و $C_2: r=\sqrt{2}$

الف: مساحت ناحیه داخل C_1 و خارج C_2

ب: مساحت ناحیه خارج C_1 و داخل C_2

الف: تقاطع: $2\cos\theta=\sqrt{2} \to \cos\theta=\sqrt{2}/2 \to \theta=\pm\pi/4$



$$\text{مساحت}\; 2\times\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left((2\cos\theta)^2-\sqrt{2}^{\,2}\right)d\theta\right\}$$

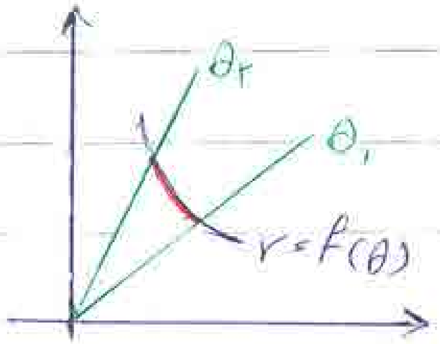
مساحت نیمه بالایی

$$=\int_0^{\pi/4}(\underbrace{4\cos^2\theta-2}_{2\cos2\theta})\,d\theta=\sin2\theta\Big|_0^{\pi/4}=1$$

ب) $$\text{مساحت} = 2\times\left\{ \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\sqrt{2}^{\,2}-(2\cos\theta)^2\right)d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{2}^{\,2}\,d\theta \right\} = \pi+1$$

مساحت نیم بالایی

طول قوس



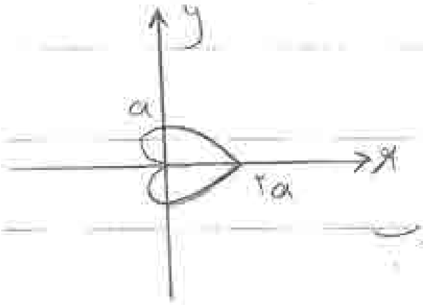
طول قسمتی از نمودار $r=f(\theta)$

که عبارت است از $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

$$\text{طول قوس} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds$$

$\frac{8}{430}$ طول قوس (محیط) $r=a(1+\cos\theta)$ را بیابید $(a>0)$



حدود θ بازه $[0, 2\pi)$ است اما چون محور x محور تقارن است پس برای θ در بازه $[0, \pi]$ محاسبه و جواب را در ۲ ضرب می‌کنیم

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=a\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = a\sqrt{2\underbrace{(1+\cos\theta)}_{2\cos^2\theta/2}}\,d\theta = 2a\left|\cos\theta/2\right|d\theta$$

$$\text{طول قوس} = \int ds = 2\int_0^{\pi} 2a\left|\overbrace{\cos\theta/2}^{\text{مثبت}}\right|d\theta = 4a\int_0^{\pi}\cos\theta/2\,d\theta$$

$$=8a\sin\theta/2\Big|_0^{\pi}=8a$$

نمودار قطبی $r=f(\theta)$ مفروض است

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

معمولاً سؤالاتی که در مورد مشتق نمودار قطبی (مانند خط مماس، اکسترمم و ...) مطرح می‌شود با نوشتن معادله قطبی به صورت پارامتری (بر حسب θ) حل می‌شود

$\frac{196}{۲ج ۳۳۲}$ معادله خط مماس بر منحنی $r=1-\cos\theta$ در $\theta=\frac{\pi}{2}$ را بیابید

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = (1-\cos\theta)\cos\theta \\ y = (1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

شیب مماس ؛ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta - (1-\cos\theta)\sin\theta}$$

نقطه $\theta=\pi/2 \Rightarrow (x,y)=(0,1)$ شیب مماس $\theta=\pi/2 \rightarrow dy/dx = -1$

$y-1=-(x-0) \rightarrow y+x=1 \xrightarrow{قطبی} r\sin\theta + r\cos\theta = 1$ ، $r=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$ خط مماس

$\frac{20}{۲ج ۸۴}$ بیشترین فاصله نقاط منحنی قطبی $r=\sin2\theta$ از محور قطبی را بدست آورید

چون فاصله هر نقطه از محور x ها برابر $|y|$ است، پس باید $|y|$ را ماکزیمم کنیم

$$|y| = |r\sin\theta| = |\overset{2\sin\theta\cos\theta}{\sin2\theta}\sin\theta| = 2\sin^2\theta|\cos\theta| = 2\underbrace{(\sin^2\theta)^1(\cos^2\theta)^{1/2}}_{جمع ثابت = 1}$$

$$\xrightarrow{max} \begin{cases} \frac{\sin^2\theta}{1} = \frac{\cos^2\theta}{1/2} = 2\cos^2\theta \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos^2\theta = 1/3 \\ \sin^2\theta = 2/3 \end{cases}$$

$$\max(|y|) = 2\sin^2\theta\cos\theta = 2(2/3)\sqrt{1/3} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

$\frac{۹}{۴۳۲}$ کوتاه‌ترین و بلندترین فاصله مبدأ را از خم زیر بیابید $x^2+xy+y^2=16$

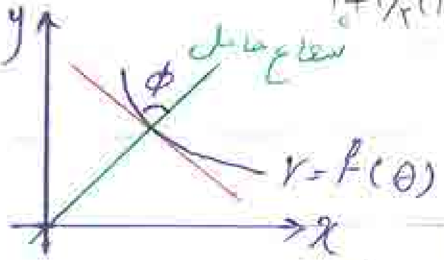
چون فاصله هر نقطه (x,y) از مبدأ برابر $d=\sqrt{x^2+y^2}$ است پس باید d را اکسترمم کنیم. در مختصات قطبی داریم $d=\sqrt{x^2+y^2}=r$

$$x^2+y^2+xy=16 \rightarrow r^2+r^2\cos\theta\sin\theta=16$$

کافی است ابتدا r^2 را اکسترمم کنیم:

$$\max(r^2)=\frac{16}{1+\frac{1}{2}(-1)}=32 \rightarrow \max(r)=\sqrt{32}$$

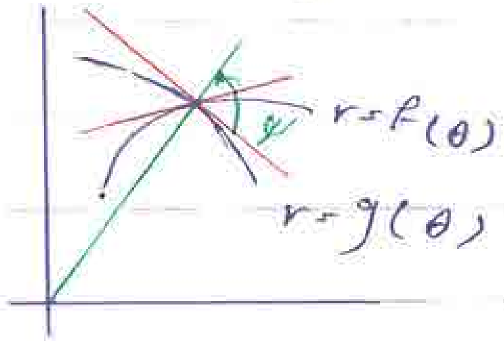
$$\min(r^2)=\frac{16}{1+\frac{1}{2}(1)}=\frac{32}{3} \rightarrow \min(r)=\sqrt{\frac{32}{3}}$$



نکته: نمودار قطبی $r=f(\theta)$ و نقطه P روی آن متناظر $\theta=\theta_0$ مفروض است. زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر نمودار در نقطه P عبارت است از: $0<\phi<\pi$.

$$tg\phi=\frac{r}{r'}=\frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$$

نکته: اگر دو نمودار قطبی $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ در نقطه P متناظر θ_0 تقاطع کنند زاویه بین دو نمودار در نقطه P عبارت است از: $\psi=|\phi_2-\phi_1|$ که در آن ϕ_1 و ϕ_2 زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر نمودار f و g در نقطه P خواهند بود.



$$tg\psi=\frac{tg\phi_2-tg\phi_1}{1+tg\phi_1\, tg\phi_2}$$

تذکر۱: هرگاه در دو نمودار قطبی حاصلضرب $tg\phi_1$ و $tg\phi_2$ برابر (۱-) شود دو نمودار برهم عمودند یعنی $\psi = \frac{\pi}{2}$

۱۳۲/ ج۲ ۶۲: زاویه بین خط مماس بر $r=a(1-\cos\theta)$ و پرتو $\theta=\frac{\pi}{2}$

ϕ: زاویه مماس و شعاع حامل ــــ شعاع حامل

$$tg\phi = \frac{r}{r'} = \frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}$$

۳۸/ ج۲. ۶۵۸: زاویه بین خطوط مماس بر نمودارهای زیر بیابید

$r=2(1+\sin\theta)$ بین دو نمودار = ψ

$r=3(1-\sin\theta)$

$$\text{تقاطع} \rightarrow 2(1+\sin\theta)=3(1-\cos\theta) \rightarrow \sin\theta = 1/5$$

$$r=2(1+\sin\theta) \rightarrow tg\phi_1 = \frac{r}{r'} = \frac{2(1+\sin\theta)}{2\cos\theta}$$

$$r=3(1-\sin\theta) \rightarrow tg\phi_2 = \frac{r}{r'} = \frac{3(1-\sin\theta)}{-3\cos\theta}$$

$$\rightarrow tg\phi_1\, tg\phi_2 = \frac{1-\sin^2\theta}{-\cos^2\theta} = -1$$

$$tg\psi = \infty \rightarrow \psi = \pi/2$$

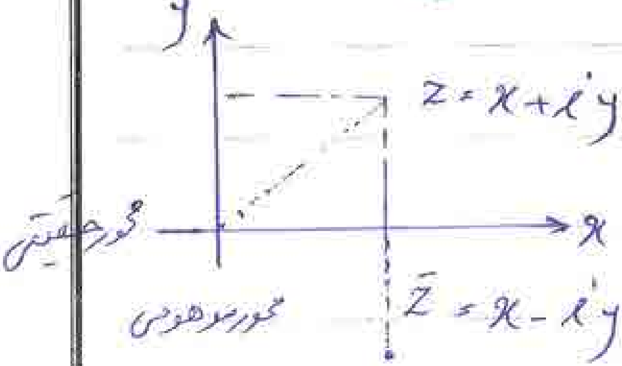
فصل ششم
اعداد مختلط

$x^2+1=0 \to x^2=-1 \to x=\pm\sqrt{-1}$

$i=\sqrt{-1} \leftrightarrow i^2=-1$

$z=x+iy \quad , \quad x,y\in\mathbb{R}$

عدد مختلط $\quad Re(z) \quad Im(z)$



$z=x+iy \to (x,y)$

$\bar{z}=x-iy$

قدر مطلق $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2-i^2y^2=x^2+y^2$

$\to z\bar{z}=|z|^2$

اگر $z+\frac{1}{z}=1$ حاصل $z^2+(z)^2$ را بیابید

۳۲
۸۴ ج۲

z ضرب در $\to z^2+1=z \to z^2-z+1=0$

$\to z=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=1/2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=1/2-\sqrt{3}/2\, i=x+iy$

$z^2=(x+iy)^2=x^2+i^2y^2+2ixy=x^2-y^2+2ixy$

$\bar{z}^2=(\bar{z}^2)=x^2-y^2-2ixy \to z^2+\bar{z}^2=2(x^2-y^2)=2(1/4-3/4)=-1$

۱۰۵
۲ج۸۵

θ چقدر باشد تا عدد مختلط $Z=\frac{۳+۲i\sin\theta}{۱-۲i\sin\theta}$ فاقد جزء حقیقی باشد

باید قسمت حقیقی Z صفر شود

$$\frac{Z_۱}{Z_۲}=\frac{Z_۱}{Z_۲}\cdot\frac{\overline{Z_۲}}{\overline{Z_۲}}=$$

$$Z=\frac{۳+۲i\sin\theta}{۱-۲i\sin\theta}\cdot\frac{۱+۲i\sin\theta}{۱+۲i\sin\theta}=\frac{(۳-۴\sin^۲\theta)+۸i\sin\theta}{۱+۴\sin^۲\theta}$$

$$Re(z)=۰\rightarrow ۳-۴\sin^۲\theta=۰\rightarrow \sin^۲\theta=۳/۴\rightarrow \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{۳}$$

۲
۲ج۸۳۹

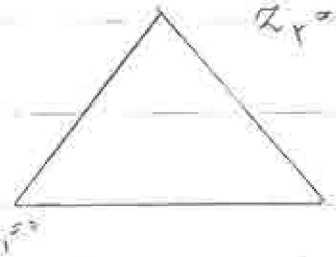
به ازای چه مقدار k مبدأ و دو ریشه مختلط معادله $Z^۲+aZ+\frac{a^۲}{k}=۰$ سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند ($a\neq۰$ و $a\in IR$) (عمران ۹۱)

۱) $\sqrt{۳}/۲$ ۲) $۳/۲$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۳

ریشه‌ها: $Z=\frac{-a\pm\sqrt{a^۲-\frac{۴a^۲}{k}}}{۲}=\frac{-a\pm a\sqrt{۱-۴/k}}{۲}=-a/۲\pm a/۲\sqrt{۴/k-۱}\,i$

توجه کنید که برای آنکه ریشه غیرحقیقی ایجاد شود باید $۱-۴/k<۰$ پس $\frac{۴}{k}-۱>۰$

$$Z_۲=-a/۲+a/۲\sqrt{۴/k-۱}\,i$$



$$Z_۳=\overline{Z_۲}$$

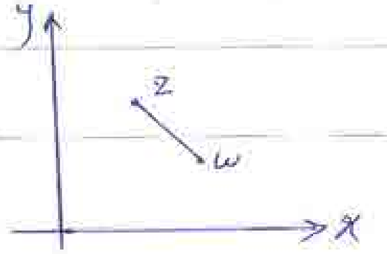
$$|Z_۲-Z_۱|=|Z_۳-Z_۱|=\sqrt{(a/۲)^۲(۱+۴/k-۱)}=a/۲\sqrt{۴/k}$$

$Z_۳$ و $Z_۲$ فاصله $=|Z_۲-Z_۳|=|۲\times a/۲\sqrt{۴/k-۱}\,i|=a\sqrt{۴/k-۱}$

متساوی‌الاضلاع $\rightarrow a\sqrt{۴/k-۱}=a/۲\sqrt{۴/k}$

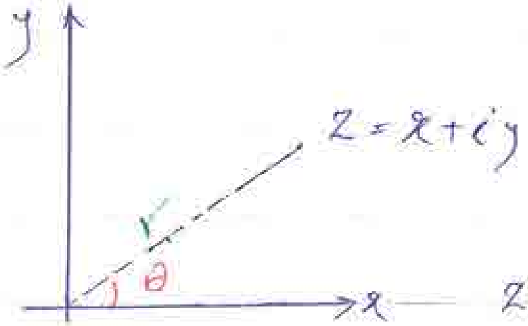
$$\sqrt{\frac{۴-k}{k}}=\frac{۱}{\sqrt{k}}\rightarrow ۴-k=۱\rightarrow k=۳$$

تذکر :



فاصله z از w $= |z - w|$

نمایش قطبی :



$r = |z|$

$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$= r(\underbrace{\cos\theta + i\sin\theta}_{e^{i\theta}}) = re^{i\theta} \rightarrow z = re^{i\theta}$ نمایش قطبی

$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

ویژگیها :

۱) $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + ۲k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$

۲) $z = re^{i\theta} \rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$

۳) $(r_۱ e^{i\theta_۱})(r_۲ e^{i\theta_۲}) = r_۱ r_۲ e^{i(\theta_۱ + \theta_۲)}$

۴) $(\underbrace{\cos\theta + i\sin\theta}_{e^{i\theta}})^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

محاسبه ریشه n ام یک عدد

$\sqrt[n]{z} = w \longrightarrow w^n = z$

$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + ۲k\pi)}$

$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} e^{(\frac{\theta + ۲k\pi}{n})i} \qquad k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$

۱۱ / ۴۵۷

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$$

$$1+\sqrt{3}i = re^{i\theta} = 2e^{\frac{\pi}{3}i} \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2 \\ tg\,\theta = y/x = \sqrt{3} \to \theta = \pi/3 \end{cases}$$

$$1-\sqrt{3}i = \overline{1+\sqrt{3}i} = 2e^{-\pi/3\, i}$$

$$\text{عبارت} = \left(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{-\pi/3\, i}}\right)^{10} = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{10} = e^{\frac{20\pi}{3}i} = e^{(\frac{20\pi}{3}-6\pi)i}$$

$$= e^{2\pi/3\, i} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin 2\pi/3 = -1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴ / ۴۲۷۴ اگر A و B و C زوایای یک مثلث باشند مطلوبست (عمران ۹۰)

$$(\sin A + i\cos A)^{1389}(\sin B + i\cos B)^{1389}(\sin + i\cos C)^{1389}$$

$$\sin A + i\cos A = i(\cos A + \overset{-i}{1/i}\sin A) = i(\cos A + i\sin A) = ie^{-iA}$$

$$\text{عبارت} = (\underset{i^2 i = -i}{i^3} e^{-iA} e^{-iB} e^{-iC})^{1389} = (-ie^{-i(\overset{\pi}{A+B+C})})^{1389}$$

$$= (-i\,e^{-i\pi})^{1389} = i^{1389} = i(i^2)^{694} = i\times 1 = i$$

$$\cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$$

۱۵ / ۴۵۸ یکی از ریشه‌های عدد زیر را بیابید

$$Z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$$

1) $\cos\pi/3 + i\sin\pi/3$		✓ 2) $\cos\pi/6 + i\sin\pi/6$

3) $\cos\pi/4 + i\sin\pi/4$		4) $\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3$

$$Z = \frac{1+i}{1+i+1^2+i^2-2i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i^2+2i}{1+1} = i = re^{i\theta} = e^{\pi/2\, i}$$

$$x=0,\ y=1 \to r=1,\ \theta=\pi/2$$

$$\to \sqrt[3]{Z} = e^{\frac{\pi/2+2k\pi}{3}i} = e^{\frac{(4k+1)\pi}{6}i} = \cos\frac{(4k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{6}$$

$k=0,1,2$		$k=0 \longrightarrow 2$

۱۸/۴۵۹

$i=\sqrt{-1} \rightarrow i^i = ?$

✓۱) $e^{-\pi/2}$	۲) $e^{\pi/2}$	۳) $e^{i\pi/2}$	۴) $e^{-i\pi/2}$

$$i^i = (e^{\pi/2\, i})^i = (e^{(2k\pi+\pi/2)i})^i = e^{(2k\pi+\pi/2)i^2}$$

$$\rightarrow i^i = e^{-(2k\pi+\pi/2)} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

مکان هندسی در صفحه مختلط

۱- $|z-z_0| = r > 0 \leftrightarrow$ دایره

۲- بیضی

$|z-z_1|+|z-z_2| = 2r > 0$ طول قطر بزرگ $= AB = 2r$

نکته: $|z-z_1|+|z-z_2| = 2r > 0$ چه شکلی است

الف: اگر $|z_1-z_2| < 2r$ ← بیضی است

ب: اگر $|z_1-z_2| > 2r$ ← تهی است

ج: اگر $|z_1-z_2| = 2r$ ← پاره خط واصل بین z_1 و z_2

۳- هذلولی

$$||z-z_1|-|z_1-z_2|| = 2r > 0$$

نکته: $||z-z_1|-|z_1-z_2|| = 2r > 0$ چه شکلی است

الف: اگر $|z_1-z_2| > 2r$ ← هذلولی است

ب: اگر $|z_1-z_2| < 2r$ ← تهی است

ج: اگر $|z_1-z_2| = 2r$ ← دونیم خط

۴ـ $\left|\frac{z-z_۱}{z-z_۲}\right| = k > ۰$

الف: اگر $k=۱$ ← خط (عمود منصف)

اگر $k \neq ۱$ ← دایره به شعاع $R=\frac{k}{|k^۲-۱|}|z_۲-z_۱|$

$\frac{۱۶۰}{۲ج۱۲۵}$ مکان هندسی z در رابطه $\left|\frac{z-۳}{z+۳}\right|=۲$ چه شکلی است؟ (عمران ۸۹ ن)

قرار دهید $z=x+iy$ و ساده کنید

$$\frac{|x-۳+iy|}{|x+۳+iy|}=۲=\frac{\sqrt{(x-۳)^۲+y^۲}}{\sqrt{(x+۳)^۲+y^۲}} \to \frac{(x-۳)^۲+y^۲}{(x+۳)^۲+y^۲}=۴$$

$$۴((x+۳)^۲+y^۲)=(x-۳)^۲+y^۲ \to ۳x^۲+۳y^۲+۳۰x+۲۷=۰$$

$$\to x^۲+y^۲+۱۰x+۹=۰ \to (x+۵)^۲+y^۲=۱۶$$

دایره به مرکز (۰و۵-) و شعاع ۴

مثال: به ازای مقادیر مختلف پارامتر $a>۰$ بررسی کنید مکان هندسی زیر چه شکلی است؟

$|z-۱|+|z+۱|=a$ (عمران ۸۸و۸۴)

$z_۱=۱ \; , \; z_۲=-۱ \to |z_۱-z_۲|=۲$

$$\begin{cases} ۲<a \to \text{بیضی} \\ ۲>a \to \text{تهی} \\ ۲=a \to \text{پاره خط} \end{cases}$$

$\frac{۱۴}{۲ج۳۱۴}$ مکان هندسی z در رابطه زیر را تعیین کنید

$|z-(۲+i)|-|z+۳+۴i|=۷۵$

$z_۱=۲+i \; , \; z_۲=-۳-۴i \quad |z_۱-z_۲|=|۵+۵i|=\sqrt{۵^۲+۵^۲}=\sqrt{۵۰}$

چون $۲r=۷۵ > \overset{\sqrt{۵۰}}{|z_۱-z_۲|} \xrightarrow{(ب)}$ تهی است

۳۵ / ۲ ج ۱۹ مکان هندسی z در رابطه زیر را مشخص کنید

$z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}+a\bar{a}=b\bar{b}$ (a و b دو عدد مختلط ثابت و $b\neq 0$)

✓ دایره   نیم دایره   خط   تهی

روش اول: چون گزینه ها به a و b وابسته نیستند پس $a=0$ و $b=1$

$\to z\bar{z}=1 \to |z|^{۲}=1 \to |z|=1$ دایره

روش دوم:

$z(\bar{z}-\bar{a})-a(\bar{z}-\bar{a})=b\bar{b}$ $(\bar{z}-\bar{a})(z-a)=b\bar{b}$

$\to |z-a|^{۲}=|b|^{۲} \to |z-a|=|b|$ دایره به مرکز a و شعاع $|b|$

۲۷ / ۴۶۴ مکان هندسی نقطه $M(x,y)$ متناظر با عدد مختلط $\cosh(۲+it), t\in\mathbb{R}$ کدام است

$x+iy=\cosh(۲+it)=\frac{e^{۲+it}+e^{-۲-it}}{۲}$

$=\frac{1}{۲}(e^{۲}\cdot e^{it}+e^{-۲}\cdot e^{-it})=\frac{1}{۲}(e^{۲}(\cos t+i\sin t)+e^{-۲}(\cos t-i\sin t))$

$=\underbrace{\frac{1}{۲}(e^{۲}+e^{-۲})}_{a}\cos t+\underbrace{\frac{1}{۲}(e^{۲}-e^{-۲})}_{b}\sin t\, i$

$\to \begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \to \underset{a\neq b}{\left(\frac{x}{a}\right)^{۲}+\left(\frac{y}{b}\right)^{۲}=1} \to$ بیضی

فصل هفتم

دنباله و سری

تعریف: تابعی که دامنه آن زیرمجموعه $\mathbb{N}$ باشد دنباله نامیده می‌شود که معمولاً آن را با نماد a_n نمایش داده و به a_n جمله عمومی می‌گوئیم — $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

$a_n: \underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots}_{\text{(برد) اعضای دنباله}}$

۱- دنباله a_n را صعودی می‌نامیم هرگاه به ازای هر n: $a_n \le a_{n+1}$

۲- دنباله a_n را کراندار می‌نامیم هرگاه اعداد α و β موجود باشند به طوریکه به ازای هر n

$\underset{\text{کران پایین}}{\alpha} \le a_n \le \underset{\text{کران بالا}}{\beta}$

مثال: دنباله $a_n=\frac{\ln n}{n}$ و $n\ge 3$ آیا یکنوا است، آیا کراندار است؟

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ و $x\ge 3$ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0 \rightarrow$ f نزولی است

$(x\ge 3 \rightarrow \ln x \ge \ln 3 > \ln e)$ پس a_n نزولی است

برای بررسی کرانداری، $f(x)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$f(3)=\frac{\ln 3}{3}$ و $f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ $0<f(x)\le\frac{\ln 3}{2}$

$\rightarrow \quad 0<a_n\le\frac{\ln 3}{3} \quad \rightarrow$ پس a_n کراندار است

تعریف: اگر $\lim_{n\to+\infty} a_n = L\in\mathbb{R}$ می‌گوئیم دنباله a_n به L همگرا است و در غیر اینصورت a_n واگرا است

روش محاسبه دنباله‌ها ($n\to+\infty$)

۱- تمام قواعد محاسبه حد توابع در مورد دنباله‌ها درست است

۲- $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=۱$ و $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{k}=۱$ $(k>۰)$

نکته: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\text{چندجمله‌ای برحسب } n}=۱$

۳- $۱^p+۲^p+\cdots+n^p\sim\frac{n^{p+۱}}{p+۱}+\frac{n^p}{۲}$ $(p>-۱)$

۴- قوانین رشد $n^n>>n!>>a^n$

۵- دستور استرلینگ $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{۲n\pi}$

$$\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}\to\sqrt[n]{(kn)!}\sim\left(\frac{kn}{e}\right)^k$$

۶- اگر $\lim_{n\to+\infty}a_n=L\in\mathbb{R}$ آنگاه میانگین حسابی و هندسی جملات a_n نیز به L میل می‌کند یعنی:

$$\frac{a_۱+\cdots+a_n}{n}\to L\qquad\sqrt[n]{a_۱\times a_۲\times\cdots\times a_n}\to L$$

$\frac{۴۷}{۳ج۷۸۲}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{۳n}{۳n-۱}\right)^{۲n+\sqrt{n}}=۱^\infty$$

عبارت $\overset{۱^\infty}{=}e^{(۲n+\sqrt{n})\left(\frac{۳n}{۳n-۱}-۱\right)}=e^{\frac{۲n+\sqrt{n}}{۳n-۱}}$

$$\sim e^{\frac{۲n}{۳n}}=e^{۲/۳}$$

$\frac{۲۹}{۳ج۲۰۲}$

$$a_n=\frac{\left(\frac{n+۱}{n}\right)^{n^۲}}{۲^n}\sim\frac{e^n}{۲^n}\longrightarrow+\infty$$

صورت $=\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n^۲}\overset{۱^\infty}{=}e^{n^۲(۱+۱/n-۱)}=e^n$

چون $e>۲$ پس رشد صورت از مخرج بیشتر است

$\frac{۸}{۳۹۵}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

عبارت $=\frac{۱^{۱/۲}+۲^{۱/۲}+\cdots+n^{۱/۲}}{n\sqrt{n}}\underset{p=۱/۲}{\overset{(۳)}{\sim}}\frac{\frac{n^{۳/۲}}{۳/۲}}{n^{۳/۲}}=۲/۳$

$\frac{۱۱}{۴۹۵}$

$$\lim_{n\to+\infty} {}^{۱}\!/_{n} \sqrt[n]{\frac{(۲n+۱)}{n!}}$$

$$= {}^{۱}\!/_{n} \frac{\sqrt[n]{۲n+۱}\ \sqrt[n]{(۲n)!}}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{\left(\frac{۲n}{e}\right)^{۲}}{n\cdot {}^{n}\!/_{e}} = {}^{۴}\!/_{e}$$

$$(۲n+۱)! = ۱\times۲\times۳\times۴\times\cdots\times۲n\times(۲n+۱) = (۲n+۱)(۲n)!$$

مثال:

$$a_n = {}^{۱}\!/_{n} \sqrt[n]{(n+۱)(n+۲)\cdots(n+n)}$$

روش اول: عبارت زیر رادیکال را در n! ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$a_n = {}^{۱}\!/_{n} \sqrt[n]{\frac{۱\times۲\times\cdots\times n\,(n+۱)\cdots(n+n)\ ۲n}{n!}} = {}^{۱}\!/_{n} \sqrt[n]{\frac{(۲n)!}{n!}} \sim \frac{\left(\frac{۲n}{e}\right)^{۲}}{n\left(\frac{n}{e}\right)_{e}} = {}^{۴}\!/_{e}$$

روش دوم:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(n+۱)(n+۲)\cdots(n+n)}{n^{n}}} = \sqrt[n]{(۱+{}^{۱}\!/_{n})(۱+{}^{۲}\!/_{n})\cdots(۱+{}^{n}\!/_{n})}$$

$n\to+\infty$

$$\ln(a_n)_{n\to+\infty} = {}^{۱}\!/_{n}\left(\ln(۱+{}^{۱}\!/_{n}) + \ln(۱+{}^{۲}\!/_{n}) + \cdots + \ln(۱+{}^{n}\!/_{n})\right)$$

مجموع ریمان

$${}^{۱}\!/_{n} f(c_k) = \text{جمله عمومی} = {}^{۱}\!/_{n}\ln\left(۱+\frac{k}{n}\right) \to f(c_k) = \ln\left(۱+\frac{k}{n}\right) \to c_x \to x$$

$$\ln(\text{جواب}) = \int_{۰}^{۱} \ln(۱+x)\,dx = x\ln(۱+x)\Big|_{۰}^{۱} - \int_{۰}^{۱}\frac{x+۱-۱}{x+۱}dx$$

$$\frac{x+۱-۱}{x+۱} = ۱ - \frac{۱}{x+۱}$$

$$= \ln ۲ - (x - \ln(x+۱))\Big|_{۰}^{۱} = \ln ۲ - ۱ + \ln ۲ = ۲\ln ۲ - ۱ = \ln {}^{۴}\!/_{e}$$

$$\text{جواب} = {}^{۴}\!/_{e}$$

$\frac{۴۳}{۲۶۸۴۴}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n^{۲}}}{((۴n)!)^{n}} \qquad m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^{m}\sqrt{۲m\pi}$$

$$\text{عبارت} \sim \frac{n^{n^{۲}}}{\left(\left(\frac{۴n}{e}\right)^{۴n}\sqrt{۸n\pi}\right)^{n}} = \frac{n^{n^{۲}}}{({}^{۴}\!/_{e})^{۴n^{۲}}\, n^{۴n^{۲}}\,(۸n\pi)^{n/۲}} \to ۰$$

۳۷ / ۲ج۴۴۴

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)\ln n$$

عبارت $= (e^{\overset{\to 0}{\frac{1}{n}\ln n}}-1)\ln n \sim (\frac{1}{n}\ln n)\ln n = \frac{(\ln n)^2}{n} \to 0$

۳۶ / ۵۴۷

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(1+\sqrt{e}+\sqrt[3]{e^2}+\dots+\sqrt[n]{e^{n-1}})$$

$$= \frac{1+\sqrt{e}+\sqrt[3]{e^2}+\dots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n} = \frac{a_1+\dots+a_n}{n} \to e$$

$$a_n = \sqrt[n]{e^{n-1}} = e^{\frac{n-1}{n}} \sim e^{n/n} = e \quad (n\to+\infty)$$

مثال:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\underbrace{2/2}_{a_1}\times\underbrace{8/5}_{a_2}\times\underbrace{18/10}_{a_3}\times\dots\times\underbrace{\frac{2n^2}{n^2+1}}_{a_n}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1\times a_2\dots a_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a_n = 2$$

نکته: در سوالات میانگین اصولاً جملات اول n ندارند و عدد هستند

تذکر: اگر دنباله‌ای که حدّ آن مورد نظر است به صورت مجموع n جمله باشد آنرا a_n می‌نامیم. چنانچه دنباله‌های مناسب b_n و c_n را طوری بیابیم که $c_n \leqslant a_n \leqslant b_n$، $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L \to \lim_{n\to+\infty} a_n = L$ معمولاً تعیین b_n و c_n براساس ماکزیمم و مینیمم جملات موجود در a_n (معمولاً جمله اول، آخر) انجام می‌شود

۳ / ۴۸۹

حد دنباله a_n را بیابید

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

روش اول: هر جمله در مجموع بالا به صورت $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ است که بین جمله اول و آخر قرار دارد $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$$

روش دوم $a_n \sim \underbrace{1/n + 1/n + 1/n + \dots + 1/n}_{} = 1 \rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

روش سوم: مجموع ریمان ← انتگرال معین

$$1/n\, f(c_k) = \text{جمله عمومی} = \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

$$\rightarrow f(c_k) = \frac{n}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{1+k/n^2}}$$

ل

چون c_k را نمی‌توان مشخص کرد ← مجموع، ریمانیست

$$\lim_{n\to+\infty} \left((1/n)^1 + \underbrace{(2/n)^2 + \dots + (n/n)^n}_{\text{ت}n} \right)^{1/n}$$

عمران ۹۱ $\frac{۱}{۲ج۸۳۹}$

$$\underset{1\leqslant k\leqslant n}{(k/n)^k} \leqslant (n/n)^n = 1 \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k \leqslant n \checkmark$$

توجه کنید کل مجموع از جمله اول بزرگتر است

$$n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k \geqslant 1/n \xrightarrow[\sqrt[n]{n}]{\text{توان } 1/n} \underset{\sqrt[n]{n}}{n^{1/n}} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k\right) \geqslant \underset{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}{(1/n)^{1/n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow$$ ۱ = جواب سؤال

دنباله بازگشتی

تعریف: هرگاه در یک دنباله، رابطه‌ای بین a_n و a_{n-1} برقرار باشد آن رابطه بازگشتی می‌گوییم.

۱- چنانچه دنباله بازگشتی همگرا باشد، فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ و در این صورت $a_{n+1}\to L$ و $a_{n-1}\to L$ و با اعمال حد در رابطه بازگشتی L را محاسبه می‌کنیم

۲- اگر $a_n = f(a_{n-1})$ و $f(x)$ صعودی باشد آنگاه:

الف - اگر $a_2 > a_1$ آنگاه a_n صعودی است

ب - اگر $a_2 < a_1$ آنگاه a_n نزولی است

۳- دنباله صعودی و از بالا کراندار یا دنباله نزولی و از پایین کراندار همگرا خواهند بود

۸
۲ج۱۰۷

$a_1=\sqrt{2}$ و $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ حد آن را بیابید

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \to a_{n-1}\to L$

حد رابطه بازگشتی $L=\sqrt{2+L} \to L^2=2+L \to L^2-L-2=0 \to L=\cancel{-1}, 2 \to L=2$

مثال: $a_1=\sqrt{2}$ و $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ **الف:** دنباله a_n صعودی؟ نزولی؟

ب: کراندار؟ چه کران؟

الف: $f(x)=\sqrt{2+x} \to a_n=f(a_{n-1})$

$n=2 : a_2=\sqrt{2+a_1}=\sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2}=a_1$ پس a_n صعودی است

ب: a_n صعودی $\to a_n \geqslant a_1=\sqrt{2}$ پس از پایین کراندار است

بررسی می‌کنیم که آیا ۲ کران بالاست یعنی آیا به ازای هر n ، $a_n \leqslant 2$

با استقرا داریم $n=1 , a_1=\sqrt{2}<2$ فرض می‌کنیم $a_{n-1}\leqslant 2$ $\to a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}\leqslant \overset{2}{\cancel{\sqrt{4}}}$

پس بنا بر استقرا به ازای هر n داریم $a_n\leqslant 2$ ولذا دنباله a_n کراندار است، بنابراین از (۳) دنباله a_n همگرا است

تعریف: فرض کنید a_n یک دنباله است. تعریف می‌کنیم

$$S_1=a_1,\ S_۲=a_1+a_۲,\ \dots,\ S_k=\sum_{n=1}^{k}a_n$$

به دنباله S_k سری با جمله عمومی a_n گفته می‌شود.

$$\lim_{k\to+\infty}S_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \sim \text{سری}$$

۱- سری هندسی، q و $a\neq ۰$ اعداد مختلط

$$a+aq+aq^۲+\dots=\sum_{n=۰}^{\infty}aq^n=\frac{a\sim\text{جمله اول}}{۱-q\sim\text{قدر نسبت}}$$

همگراست ← $|q|<۱$

نکته: $\underbrace{a+aq+\dots+aq^{n-۱}}_{\text{تعداد}=n}=\frac{a(q^n-۱)}{q-۱}$ ، $q\neq ۱$

۲- سری تلسکوپی

الف: $\sum_{n=1}^{k}(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{k+1}$

ب: $\sum_{n=1}^{k}(a_n-a_{n+۲})=\overbrace{(a_1+a_۲)}^{\text{دو جمله از اول}}-\underbrace{(a_{k+1}+a_{k+۲})}_{\text{دو جمله از آخر}}$

۳- p سری یا سری ریمان

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{۱}{n^p}$ همگراست ← اگر $p>۱$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{۱}{(۴n-۱)(۴n+۳)}=\frac{۱}{۴}\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{۱}{۴n-۱}}_{a_n}-\underbrace{\frac{۱}{۴n+۳}}_{a_{n+1}}$$

$\frac{۲۰}{۵۰۴}$

تلسکوپی $\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۳}-\underset{\swarrow ۰}{\frac{۱}{\infty}}\right)=\frac{۱}{۱۲}$

۲۶
ف.۵

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{\underbrace{n^۲-۱}_{(n-۱)(n+۱)}}=\frac{۱}{۲}\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{\underbrace{n-۱}_{a_n}}-\frac{۱}{\underbrace{n+۱}_{a_{n+۲}}}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}-\cancel{\frac{۱}{\infty}}-\cancel{\frac{۱}{\infty+۱}}\right)=\frac{۳}{۴}$$

۲۵
ف.۵

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\ln\frac{n(n+۲)}{(n+۱)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\ln\frac{\frac{n}{n+۱}}{\frac{n+۱}{n+۲}}=\sum_{n=۱}^{\infty}\ln\frac{n}{n+۱}-\ln\frac{n+۱}{n+۲}$$

$$\xrightarrow{\text{تلسکوپی}}\ln\frac{۱}{۲}-\underbrace{\cancel{\ln ۱}}_{۰}=-\ln ۲$$

۳۱
ف.۴

$$\lim_{n\to+\infty}\left(۱+\frac{۱}{۱+۲}+\frac{۱}{۱+۲+۳}+\cdots+\frac{۱}{۱+۲+۳+\cdots+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{\underbrace{۱+\cdots+k}_{\frac{۱}{۲}k(k+۱)}}=۲\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k(k+۱)}=۲\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\overset{\text{تلسکوپی}}{=}۲\left(\frac{۱}{۱}-\cancel{\frac{۱}{\infty}}\right)=۲$$

[illegible]

$$۱+۲+\cdots+k=\frac{۱}{۲}k(k+۱)$$

۳۰
ف.۶

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱+۲^{n+۱}}{۳^n}=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۳}\right)^n+۲\left(\frac{۲}{۳}\right)^n=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۳}\right)^n+\sum_{n=۱}^{\infty}۲\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}+\frac{\frac{۴}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۲}+۴=\frac{۹}{۲}$$

د-۱۱
ف.۲

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\sin(k\theta)}{۳^k}$$

می‌دانیم $e^{k\theta i}=\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)$

$$z=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{e^{k\theta i}}{۳^k}=\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{e^{i\theta}}{۳}\right)^k$$

$$|q|=\left|\frac{e^{i\theta}}{۳}\right|=\frac{۱}{۳}|\cos\theta+i\sin\theta|$$

$$=\frac{۱}{۳}(\sqrt{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}=\frac{۱}{۳}<۱$$

$$=\frac{\frac{۱}{۳}e^{i\theta}}{۱-\frac{۱}{۳}e^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta}}{۳-e^{i\theta}}\cdot\frac{۳-e^{-i\theta}}{۳-e^{-i\theta}}$$

$$=\frac{-۱+۳e^{i\theta}}{۱۰-۳(\underbrace{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}_{۲\cos})}=\frac{-۱+۳\cos\theta+۳i\sin\theta}{۱۰-۶\cos\theta}=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\theta)}{3k} = I_m(z) = \frac{3\sin\theta}{10-6\cos\theta}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\theta)}{3k} = Re(z) = \frac{-1+3\cos\theta}{10-6\cos\theta}$$

آزمون های همگرایی

۱) اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ پس اگر $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست

۲) آزمون برای سری نامنفی ($a_n, b_n \geq 0$)

الف: آزمون مقایسه اگر $a_n \geq b_n$:

i- اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum b_n$ همگراست

ii- اگر $\sum b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ واگراست

ب: آزمون مقایسه حدی: اگر $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$:

i- اگر $L=0$ و $\sum b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگراست

ii- اگر $L=+\infty$ و $\sum b_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ واگرا می‌باشد

iii- اگر $0<L<\infty$ آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند

تذکر: اگر وقتی $n\to+\infty$ داشته باشیم $a_n \sim b_n$ آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند

مثال: بررسی کنید $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(Ln\,n)^3}$ همگراست یا واگرا

$b_n = \frac{1}{n^p}$ ، $p>0$

اگر $P=1$ یا $0<P<1$ آنگاه $\sum b_n = \sum\frac{1}{n^p}$ واگراست

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{(Ln\,n)^3} = +\infty$$

و $L=+\infty$ پس (ii) ، $\sum a_n$ واگراست

نکته: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{p}}$ به ازای هر p واگراست.

مثال: بررسی کنید سری زیر همگرا هستند یا واگرا؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^{3}-1}$ جمله عمومی $\sim \frac{n}{2n^{3}} = \frac{1}{2n^{2}}$

چون $p=2>1$ پس $\sum \frac{1}{n^{2}}$ همگراست پس بنا به آزمون هم ارزی سری داده شده همگراست

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\qquad \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$

چون $p=1/2 \not> 1$ پس $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ واگراست $\xLeftarrow[\text{هم ارزی}]{\text{آزمون}}$ سری داده شده واگراست

۴۰
۲ ج ۲۰۳

مقادیر p را طوری بیابید که سری زیر همگرا باشد.

$$\frac{3}{1}+\frac{4}{2^{p}}+\frac{5}{3^{p}}+\frac{6}{4^{p}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^{p}}$$

$$\frac{n+2}{n^{p}} \sim \frac{n}{n^{p}} = \frac{1}{n^{p-1}} \xLeftrightarrow{\text{همگرا}} p-1>1 \Longleftrightarrow p>2$$

ج: آزمون ریشه: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$

د: آزمون نسبت: $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$

خ- اگر $L<1$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست

ذ- اگر $L>1$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست

مثال: بررسی کنید سری‌های زیر همگرا هستند یا واگرا؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}}_{a_n}$ $\qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$

$$\sim e^{(n+1)\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)} = e^{\frac{-2(n+1)}{n+1}} = e^{-2} = L$$

چون $L=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}<1$ پس سری همگراست $\left(f(x)^{g(x)} \overset{1^{\infty}}{\sim} e^{g(f-1)}\right)$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{۲^n n!}{n^n}$

روش اول: آزمون ریشه

$\sqrt[n]{\frac{۲^n n!}{n^n}} = \frac{۲\sqrt[n]{n!}}{n} \sim \frac{۲(\frac{n}{e})}{n} = ۲/e < ۱$　پس سری همگرا است

روش دوم: (آزمون نسبت)

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{۲^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{۲^n n!}{n^n}} = \frac{۲(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = ۲\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

پس سری همگرا است

$\overset{1^\infty}{=} ۲e^{n(\frac{n}{n+1}-1)} = ۲e^{\frac{-n}{n+1}} \sim ۲e^{\frac{-n}{n}} = ۲e^{-1} = ۲/e < ۱$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh n}{۲^n+۳^n}$　$\sqrt[n]{\text{جمله عمومی}} = \frac{\sqrt[n]{۱/۲(e^n+e^{-n})}}{\sqrt[n]{۲^n+۳^n}} \sim \frac{\sqrt[n]{۱/۲\, e^n}}{۳}$

$\to e/۳ < ۱ \to$ همگرا است

هـ: آزمون انتگرال

اگر $a_n = f(n)$ و تابع $f(x)$ مثبت، نزولی و پیوسته باشد آنگاه $\sum^{+\infty} a_n$ و $\int^{+\infty} f(x)\,dx$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند

مثال: بررسی کنید $\frac{}{n}$ ($\sum_{n=2}^{\infty} \boxed{\frac{1}{n(\ln n)^2}}$ همگرا است یا واگرا؟ ✓مثبت ✓نزولی ✓پیوسته

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

$\int^{+\infty} f(x)\,dx = \int_x^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \overset{t=\ln x}{=} \int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

چون ۱<۲=p پس انتگرال همگرا است ولذا بنا به آزمون انتگرال سری همگرا است

نکته: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ همگرا است $\iff p>1$

۴۳/۵۱۷ $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ و $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^۲}{۲n^۳-1}$ همگراست یا واگرا؟

$\frac{n^۲}{۲n^۳-1} \sim \frac{n^۲}{۲n^۳} = \frac{1}{۲n} \xrightarrow{p=1 \ngtr 1}$ واگراست

برای x از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم

$f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$ مثبت، پیوسته، نزولی

$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \; \frac{t=\sqrt{x}}{dt=\frac{dx}{۲\sqrt{x}}} \; \int^{+\infty} ۲e^{-t}dt = -۲e^{-t}\Big|^{+\infty} = -۲e^{-\infty}$ صفر

انتگرال همگراست

پس سری x هم همگراست

۳) آزمون سری متناوب

تعریف: چنانچه $a_n > 0$ سری زیر را متناوب می‌گوییم:

$-a_1 + a_۲ - a_۳ + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

قضیه: اگر $a_n > 0$، a_n نزولی و $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ آنگاه سری متناوب $\sum (-1)^n a_n$ همگراست

۴) آزمون قدر مطلق: اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگرا می‌باشد

تعریف: اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ را همگرای مطلق می‌نامیم

تعریف: اگر $\sum |a_n|$ واگرا و $\sum a_n$ همگرا باشد می‌گوییم $\sum a_n$ همگرای مشروط است

مثال: بررسی کنید سری‌های زیر واگرا، همگرای مطلق یا همگرای مشروط‌اند؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{۲n+1}$ سری قدر مطلق $\sum \left|\frac{(-1)^n}{۲n+1}\right| = \sum \frac{۲}{۲n+1} \sim \frac{1}{۲n}$

چون $p = 1 \ngtr 1$ پس سری قدر مطلق واگراست اما سری داده شده متناوب است:

پس این سری همگرای مشروط است   سری همگرا $\xleftarrow{\text{آزمون ۳}}$ $0 < a_n = \frac{1}{۲n+1} \to 0$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{2^{n^2}}$

سری قدرمطلق: $\sum \left|(-1)^n \frac{n^n}{2^{n^2}}\right| = \sum \frac{n^n}{2^{n^2}}$　$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\text{جمله عمومی}} = \frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{2^{n^2}}} = \frac{n}{2^n}$

$\to 0 = L < 1 \to$ پس سری قدرمطلق همگراست ⇐ همگرای مطلق است

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n+1}(-1)^n$　$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n+\sqrt{n}}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{2n}$

$= \begin{cases} 1/2 & \text{زوج } n \\ -1/2 & \text{فرد } n \end{cases}$

چون $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ پس شرط لازم را ندارد و لذا سری واگرا است

۴) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$　$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ -1 & \text{فرد } n \end{cases} \to \cos(n\pi) = (-1)^n$

سری قدرمطلق: $\sum \left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| = \sum \frac{1}{\ln n} \xrightarrow{\text{مقایسه}}$ واگرا

سری داده شده تناوب است و $a_n = \frac{1}{\ln n} > a_{n+1}$ و a_n نزولی و $a_n \to 0$ پس

سری داده شده همگراست و بنابراین همگرای مشروط است.

تعریف: $\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\text{ضریب}}{a_n}(\overset{\text{متغیر}}{x} - x_0)^n$ سری توانی حول نقطه x_0 (به مرکز x) گفته می‌شود

$R \in [0, +\infty]$ شعاع همگرایی

۱) سری به ازای x هایی که $|x - x_0| < R$ همگرای مطلق

۲) سری به ازای x هایی که $|x - x_0| > R$ واگرا است

۳) وضع سری در $x = x_0 \pm R$ حکم کلی ندارد

نحوه محاسبه R:

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^{kn+m}$, $k>0$, $m \in Z$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R^k} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

مثال: بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n(n+1)}$ را بیابید

کلیه مقادیری از x که سری به ازای آن همگرا باشد

$a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$ ، مرکز: $x_0 = -3$

* ابتدا شعاع همگرایی را مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n+1}} = 1/2 = \frac{1}{R^1} \to R=2 \to |x+3|<2$$

$$\to -2 < x+3 < 2 \to -5 < x < -1$$

* همچنین وضع سری را در ابتدا و انتها تعیین می‌کنیم

$x=-1$: $\sum \frac{2^n}{2^n(n+1)} = \sum \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ واگرا

$x=-5$: $\sum \frac{(-2)^n}{2^n(n+1)} = \sum \frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow{\text{متناوب}}$ همگرا $\Leftarrow 0 < \frac{1}{n+1} \to 0$

بازه همگرایی $= [-5 \text{ و } -1)$

مثال: شعاع همگرایی سری‌های زیر را بیابید

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3^n+2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n} (x+1/2)^n$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{2}{\sqrt[n]{2^n+3^n}} = \frac{2}{3} = \frac{1}{R^1} \qquad R = \frac{3}{2}$$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{n^2+1}{n!}}_{a_n}(x-1)^{n+5}$ $\lim\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n!}}=\lim\frac{\sqrt[n]{n^2+1}}{\sqrt[n]{n!}}\sim\frac{1}{n/e}$

$\to 0=\frac{1}{R'}\to R=+\infty$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(3+(-1)^n)^n}_{a_n}(x-1)^{2n}$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}|3+(-1)^n|=\begin{cases}4 & n \text{ زوج}\\ 2 & n \text{ فرد}\end{cases}$

$\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=4=\frac{1}{R}$

$R^2=1/4\to R=1/2$

نکته: در محاسبه شعاع $\sum a_n(x-x_0)^{kn+m}$ چنانچه $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ چند عدد مختلف بدست آید، بزرگترین حد در فرمول محاسبه می شود

$\lim\sup$

$\lim\sup\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R^k}=\lim\sup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

۵۶
۵۲۳

اگر شعاع همگرایی $\sum a_nx^n$ برابر R باشد شعاع همگرایی $\sum\frac{n!}{n^n}a_n^2x^n$ چیست؟

۱) $\frac{1}{e}R^2$ ۲) R^2 ✓۳) eR^2 ۴) e^2R

$\frac{1}{R'}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}a_n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overset{n/e}{\sqrt[n]{n!}}}{n}\sqrt[n]{a_n^2}=1/e\lim(\underbrace{\overset{1/R}{\cancel{\sqrt[n]{|a_n|}}}}_{\text{صورت سوال}})^2=\frac{1}{eR^2}$

۵۹
۵۳۴

بازه همگرایی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n(\ln n)^2}$

۱) $[-1,3]$ ✓۲) $[1,3]$
۳) $(-1,1]$ ۴) $[-1,1]$

روش اول: وسط بازه همگرایی مرکز سری توانی است و در این سوال فقط وسط گزینه ۲ با مرکز یعنی $x=2$ یکسان است ← گزینه ۲

$a_n=\frac{1}{n(\ln n)^2}$ $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}\,(\sqrt[n]{\ln n})^2}=1=\frac{1}{R'}$

$\to R=1\to|x-2|<1\to 1<x<3\to$ بازه همگرایی $=[1,3]$

$x=3$، $\sum\frac{1}{n(\ln n)^2}\xrightarrow{P=2>1}$ همگرا $x=1$، $\sum\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}\xrightarrow{\text{متناوب}}$ همگرا

$\frac{۶۰}{۵۲۴}$ فاصله همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{n!}{n^n}} x^n$

۱) (۰و۱) ۲) (-۱و۱) ۳) (۰وe) ۴) (-eوe)

کافی است R را بدست آوریم

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} = \frac{1}{R} \rightarrow R=e \rightarrow |x|<e \rightarrow -e<x<e$$

بررسی دقیق‌تر، در $x=\pm e$ بررسی می‌کنیم $x=e: \sum \frac{n!}{n^n} e^n$

ابتدا و انتهای بازه را هیچ وقت با آزمون ریشه یا نسبت کنترل نمی‌کنیم

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{۲n\pi}$$

جمله عمومی $\underset{n\to+\infty}{\frac{n!}{n^n} e^n} \sim \frac{(n/e)^n \sqrt{۲n\pi}}{n^n} e^n = \sqrt{۲n\pi} \rightarrow +\infty$

چون حد جمله عمومی صفر نمی‌شود پس شرط لازم را ندارد ⇐ واگرا

$$x=-e: \sum (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n$$

جمله عمومی $\sim (-1)^n \sqrt{۲n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty \neq ۰$ شرط لازم را ندارد ⇐ واگراست

بازه همگرایی = (-eوe)

$\frac{۱۴}{۵۸۸}$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^۲}{(۲n)!} x^{۲n}$ برکدام فاصله همگراست

✓۱) $|x|<۲$ ۲) $(-\infty و +\infty)$

۳) $|x|<۴$ ۴) $۰<x<۲$

کافی است شعاع همگرایی را بدست آوریم

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(\sqrt[n]{n!})^۲}{\sqrt[n]{(۲n)!}} \sim \frac{(n/e)^۲}{(۲n/e)^۲} = ۱/۴ = ۱/R^۲$$

$\rightarrow R=۲ \rightarrow |x|<۲$

بررسی دقیق‌تر در $x=\pm 2$ نیاز به بررسی دارد

$$x=\pm 2 \longrightarrow \sum 4^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}} \sim \frac{4^n \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}\right)^2}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4n\pi}} = \frac{2n\pi}{2\sqrt{n\pi}} = \sqrt{n\pi} \longrightarrow +\infty$$

چون شرط لازم را ندارد پس واگرا است $(-2,2)=$ بازه همگرایی

نکته: هرگاه سری غیرتوانی مطرح شود برای یافتن بازه همگرایی آن مانند سری عددی رفتار می‌کنیم. معمولاً جمله عمومی را b_n نامیده و $L=\lim\sqrt[n]{|b_n|}$ را محاسبه می‌کنیم حال $L<1$ را حل می‌کنیم تا یک بازه (باز) برای x بدست آید سپس $L=1$ را بررسی می‌کنیم تا بازه بدست آید

۶۴
۵۲۷

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\boxed{\left(\frac{x-1}{x}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left|\frac{x-1}{x}\right|=\left|\frac{x-1}{x}\right|=L$$

$$L=\frac{|x-1|}{|x|}<1 \rightarrow |x-1|<|x| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-2x+1<x^2$$

$$\rightarrow 1-2x<0 \rightarrow x>\frac{1}{2}$$

حال $L=1$ را بررسی می‌کنیم $L=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\rightarrow \sum\frac{(-1)^n}{n}$ همگرا

$[\frac{1}{2},+\infty)=$ بازه همگرایی

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{x^n}{n^x}}_n$ بازه همگرایی

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\lim\frac{|x|}{(\sqrt[n]{n})^x}=|x|=L$$

$$\rightarrow L=|x|<1 \rightarrow -1<x<1$$

$$L=|x|=1 \rightarrow \begin{cases} x=1:\ \sum\frac{1}{n} & \text{واگرا} \\ x=-1:\ \sum\frac{(-1)^n}{n^{-1}}=\sum n(-1)^n \end{cases}$$

چون حد جمله عمومی $n\times(-1)^n$ صفر نمی شود ← واگرا است

بازه همگرایی $=(-1,1)$

سری تیلور و مک لورن

تعریف: اگر $f(x)$ در x_0 تا هر مرتبه ای مشتق پذیر باشد آنگاه سری تیلور $f(x)$ حول x_0 عبارت است از: $(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots$

و چنانچه $x_0=0$ به آن سری مک لورن می گوییم

نکته ۱: سری تیلور حول x_0، تنها سری توانی است که در یک بازه همگرایی حول x_0 با $f(x)$ مساوی می شود.

نکته ۲: چند جمله ای تیلور $f(x)$ حول x_0 از درجه k عبارت است از:

$$P_k(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

توجه کنید که به ازای $k=1$ عبارت $P_1(x)$ همان تقریب خطی می باشد.

بنابراین چند جمله ای تیلور تقریباً با $f(x)$ برابر است $f(x)\simeq P_k(x)$

* اگر $P_k(x)$ را به عنوان مقدار تقریبی $f(x)$ حول x_0 انتخاب کنیم، عدد c بین x_0 و x موجود است که:

$$R_k(x) = f(x) - P_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)$$

مثال: اگر برای محاسبه مقدار تقریبی e از بسط تیلور $f(x) = e^x$ حول $x_0=0$ تا درجه ۴ استفاده کنیم، حداکثر مقدار خطا چقدر است؟

$$e = f(1) \to x=1 \text{ و } x_0=0 \quad k=4 \to R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-0)^5$$

و لذا $0<c<1$ موجود است که $f^{(5)}(x) = e^x$

$$R_4(1) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} = \frac{e^c}{120} < \frac{e}{120} < \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

$(c<1 \to e^c < e^1 = e)$

خطای محاسبه حداکثر ۰/۰۲۵ = $\frac{1}{40}$ می‌باشد

مثال: سری تیلور $f(x) = \frac{1}{1-x}$ حول صفر را بیابید؟ (مک لورن)

$x_0 = 0 \to$ مک لورن

مک لورن: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ و } f''(x) = \frac{2}{(1-x^3)} \text{ و } f'''(x) = \frac{2x^3}{(1-x)^4}$$

$$\to f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \to f^{(n)}(0) = n!$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n \quad R=1 \quad -1<x<1$$

مثال: مک لورن $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ را بیابید؟

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{x \to -x^2} \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \to \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

مثال: مک لورن $h(x) = \ln(1-x)$ را بیابید؟

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\int_0^x} -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \to \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$\frac{۳۱}{۵۷۱}$ ضریب x^3 را در بسط لورن $f(x)=\ln(1+\overbrace{x+x^2}^{t})$ را بیابید؟

روش اول: ضریب x^3 برابر $\frac{f'''(0)}{3!}$ است. (طولانی است)

روش دوم: $t=x+x^2\sim x \to x\sim t \to x^3\sim t^3$

$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\dots$

$\ln(1+x+x^2)=(x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{3}$

x^3 ضریب $= 0+-1+1/3=-2/3$

$-\frac{1}{2}(x+x^2)^2 \longrightarrow$ x^3 جمله شامل $=-\frac12(2mb)=-ab=-x^3\to -1$

$\frac13(x+x^2)^3\sim \frac13 x^3 \longrightarrow \frac13$

$\frac{۷۲}{۵۳۴}$ ضریب x^4 در بسط لورن $e^{\overbrace{\sin x}^{t}}$ را بیابید

$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\dots$

$t=\sin x\sim x \to x\sim t\to x^4\sim t^4$

$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^4 x}{24}+\dots$

x^4 ضریب $=0+0+(-1/6)+\frac{1}{24}=-1/8$

$\frac{1}{24}$ $\sin^2 x=\frac12\left(x-\frac{x^3}{6}+\dots\right)^2$

x^4 جمله شامل $=\frac12(2ab)=ab=-\frac16 x^4$

$\frac{۱۳۰}{۴۵۵\text{ ج}۲}$ چند جمله‌ای مک لورن درجه ۲ تابع $(1+x)^{1/x}$ را بیابید

$(1+x)^{1/x}=e^{\frac1x\ln(1+x)}=f(x)$

$\frac1x\ln(1+x)=1-\frac12 x+\frac13 x^2+\dots$

$f(x)=e^{1-x/2+x^2/3-\dots}\quad t\to 0\ = e^1 e^{-x/2+x^2/3+\dots}$

$$=e\left(1+\left(-x/2+x^2/3-\dots\right)+1/2\left(-x/2+x^2/3\dots\right)^2+\dots\right)$$

$$\to f(x)=e\left(1-1/2\,x+\left(1/3+1/8\right)x^2+\dots\right.$$

۸۲ / ۵۳۷

(۶ بار کنکور آمده) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=?$

۱) $(x+1)e^x$ ۲) x^2e^x

۳) $(x^2+1)e^x$ ۴) $(x^2+x)e^x$

n^n نشانه مشتق $\frac{1}{n}$ یا $\frac{1}{n+a}$ نشانه انتگرال

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}=e^x$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=xe^x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}=e^x+xe^x\quad\xrightarrow{\text{ضرب در } x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=xe^x+x^2e^x$$

۲ / ج۲ ۱۰۸

حاصل $1-3x^2+5x^4-7x^6+\dots$ برای $|x|<1$ را بیابید

سری هندسی با $q=-x^2$

$$\xrightarrow{\text{جمع عبارت}}x-x^3+x^5-x^7+\dots=\frac{x}{1+x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}1-3x^2+5x^4-\dots=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

مثال $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ را بیابید عامل ۲ را نادیده گرفته و باقی مانده را x^n می نامیم

$$\sum_{n=1}nx^n=?\qquad\sum x^n=\frac{1}{1-x}\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } x}\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1/2}{(1-1/2)^2}=2$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{2^n}=?$$

$$2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=1/2+1/2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{2^n}\to\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2-1=1$$